Darja Antolin
Urška Lipovec

Shematske vizualne reprezentacije potence

Izvirni znanstveni članek
UDK: 37.091.3:511.11

POVZETEK

Vizualizacija matematičnih konceptov je učinkovita učna in poučevalna strategija. Znotraj pouka matematike je najbolj prisotna v t. i. slikovnem nivoju pouka, pri katerem je koncept predstavljen z grafično reprezentacijo. V prispevku preverjamo prisotnost shematske vizualne upodobitve potence 2^3 pri gimnazijcih ter pri študentih, bodočih učiteljih matematike in bodočih učiteljih razrednega pouka (N = 483). Ugotovimo, da je ta vrsta reprezentacije prisotna le v malo več kot tretjini slik. Dodatno zaznamo, da so udeleženci mnogo bolj orientirani na podajanje rezultata kot na prikazovanje koncepta. Ob koncu predlagamo metodične napotke za vpeljevanje koncepta potence skozi strukturo ugnezdene cepitve, ki vodi k bolj konceptualnemu poznavanju tega sicer elementarnega matematičnega pojma.

Ključne besede: pouk matematike, reprezentacije, potenca, konceptualna slika

Schematic Visual Representation of Exponentiation

Original scientific article
UDK: 37.091.3:511.11

ABSTRACT

Visualization of mathematical concepts is an effective learning and teaching strategy. Within mathematics lessons, visualisation is mostly present at iconic level, where concepts are graphically represented. In this paper we present the study that aimed at investigating the presence of schematic visual representation of exponentiation 2^3 among pupils attending gymnasium and students, future elementary teachers and future teachers of mathematics (N = 483). Our findings show that schematic visual representation appeared only in little more than a third of all drawings. Additionally, we observe that participants are much more oriented to representing the result rather than the concept. At the end, we add methodical guidance on introducing the concept of exponent through the structure of nested fission, which leads to more conceptual understanding of this elementary mathematical concept.

Key words: mathematics education, representations, mathematical concept, exponent, conceptual picture

Uvod

Potence so pomemben matematični koncept, ki je koristen pri razumevanju različnih življenjskih pojavov in ga lahko že mlajšim učencem prikažemo na zanimiv način (Lipovec 2006). Običajno potenco učencem prikažemo kot produkt enakih faktorjev – to pa je primerno le za zgodnjo fazo vpeljave tega pojma, kajti potence z eksponentom, ki ni naravno število, kot npr. 2^{-1}, $2^{1/2}$ ne morejo slediti tej vpeljavi. Zato sta Conferey in Smith (1995) kot alternativo predlagala cepitev, tj. prikaz skozi več verzij originala. Bistvo tega pristopa je v prikazovanju situacij, v katerem dejavnostno prikažemo več verzij originala. Kot primer navajata npr. zaporedno razpolavljanje. Za razliko od seštevalnih struktur, pri katerih je bistvo dejavnosti v določanju enote in preštevanju ponavljajočih se verzij le-te, je pri cepitvi fokus na odnosu ena-mnogo verzij. Pojasnimo na primeru. Pri množenju $4 \cdot 3$ je dejavnost povezana z določanjem skupin s po 3 objekti, ki se ponovijo štirikrat, npr. 4 košare s po 3 jabolki. Pri potenciranju 3^4 pa je pripadajoča dejavnost vezana na določanje verzije 3 objektov, ki se nato štirikrat cepi v različnih nivojih, npr. v mestu so tri ulice, v vsaki ulici so tri hiše, v vsaki hiši tri tričlanske družine. Gre torej za tvorjenje več verzij originala.

S tem konceptom je tesno povezano zaporedno razpolavljanje, aktivnost, ki se pojavi hitro v otroškem razvoju. Podobna dejavnost je matematični koncept podobnosti oz. povečevanja/zmanjševanja objekta v danem razmerju, ki so jo podrobno proučevali de Bock in sodelavci (2007). Povečevanje v razmerju je v primeru ploščine (potenciranje s stopnjo 2) prvi nelinearni koncept, ki ga predstavimo učencem. Ugotovili so, da je linearno razmišljanje »n-krat več A, n-krat več B« močno zakoreninjeno v našem razmišljanju. V svoji seriji raziskav so se ukvarjali pretežno s kvadriranjem, tj. z idejo »2-krat večja stranica, 4-krat večja ploščina« in že ta, najpreprostejši primer potence, se je izkazal kot zelo težek za približno 14 let stare učence. Pri povečevanju prostornine (potenciranje s stopnjo 3) so bili rezultati še slabši. Predlagali so, da bi že mlajši učenci pri konceptu potence posebno pozornost posvetili nelinearnemu vidiku.

Potenca je torej pomemben matematični koncept s stališča raziskovanja napačnih predstav, ki so vgrajene v učenčeve miselne sheme.

Že v začetku osnovne šole se prvi matematični procesi in simboli ponazarjajo s pomočjo slik. Vizualne reprezentacije matematičnih pojmov so bogato raziskovalno področje. Kljub širokemu naboru raziskav so rezultati na tem področju še vedno nejasni. Čeprav se zdi, da je vizualizacija dobra metodična rešitev pri pouku matematike (Güler in Çiltaş (2011) na primer pozivata učitelje, naj v pouk vključujejo več vizualnih reprezentacij), pa vodilna raziskovalka tega področja Presmeg (1992) svari, da lahko konkretna slikovna miselna predstava reševalce matematičnih problemov odvrne od bistvenih odnosov, ki jih je treba uzavestiti za učinkovito reševanje problema. Hegarty in Kozhevnikov (1999) vizualne reprezentacije delita na shematske in slikovne. Kot shematske opredelita tiste vizualne reprezentacije, ki prikazujejo bistvene (prostorske) odnose problema, slikovne reprezentacije pa karakterizira konkretna vizualizacija objektov, ki nastopajo v problemu (slika 7).

V nadaljevanju poskušamo odgovoriti na vprašanje, kako dijaki, bodoči učitelji razrednega pouka in bodoči učitelji matematike vizualno prikazujejo potenco. Na osnovi teh podatkov bomo predlagali shematsko vizualno reprezentacijo, ki bi učencem lahko pomagala pri reševanju problemov, ki vključujejo potence. Potenco smo izbrali, ker gre za relativno neraziskan, a preprost koncept, ki ponuja izziv tako dijakom kot študentom. Dosedanje raziskave so se osredotočile na reprezentacije, ki so nastale ob reševanju kompleksnih matematičnih problemov s področja merjenja (Hegarty in Kozhevnikov 1999; Güler in Çiltaş 2011), geometrije (Presmeg 1992) ali algebre (Rivera 2010; David et al. 2014). S področja aritmetike je zaslediti raziskave z mlajšimi otroki s področja pojma števila in začetnih računskih operacij (Hodnik Čadež 2003; Rivera 2014), raziskave s področja potence pa nismo zasledili.

Najprej bomo predstavili potek in rezultate empirične raziskave, v kateri smo uporabili kombinacijo kvalitativne in kvantitativne metodologije. Pri rezultatih se bomo osredotočili na dva vidika – na pravilnost podane vrednosti potence in na koncept, ki so ga udeleženci upodobili. Statistično bomo analizirali, ali je prišlo do razlik med skupinami udeležencev. Preverili bomo, ali kategorizacija na shematske vizualne in slikovne vizualne reprezentacije, ki sta jo predlagala Hegarty in Kozhevnikov (1999), ustrezno opiše naše podatke. V diskusiji bomo dobljene rezultate primerjali s podobnimi raziskavami in v zaključku oblikovali napotke za izboljšanje šolske prakse.

Metodologija

Vzorec naše raziskave sestavlja 147 (30,4 %) dijakov splošne gimnazije, 48 (9,9 %) bodočih predmetnih učiteljev matematike Fakultete za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru (FNM UM) in 164 (34,0 %) bodočih učiteljev razrednega pouka Pedagoške fakultete Univerze v Mariboru (PeF UM). Izven Slovenije je v vzorcu zajetih 79 bodočih učiteljev razrednega pouka iz Španije ter 45 bodočih učiteljev razrednega pouka iz Slovaške, skupaj 124 (25,7 %). Tuji študenti so bili anketirani na Pedagoški fakulteti Univerze Cordoba (PeF UC) in Pedagoški fakulteti Katoliške univerze Ružomberok (PeF UR). Španski in slovaški udeleženci so bili izbrani kot namenski vzorec, ki je nastal na Erasmus izmenjavah ene izmed avtoric.

Raziskava je potekala od jeseni 2012 do poletja 2013. Sodelujoči so prejeli zelo kratko navodilo, in sicer: *Narišite risbo, ki prikazuje 2^3*. Zaradi objektivnosti dodatna pojasnila niso bila podana. Prejete odgovore smo najprej ovrednotili glede na pravilnost vrednosti potence, nato pa smo s kombiniranimi metodami kvantitativne in kvalitativne analize podatke obdelali. Uporabili smo kvalitativno vsebinsko analizo, pri kateri smo skozi sistematični proces kodiranja večjih količin enot gradiva v zbranem gradivu iskali značilne teme oz. kode. Te teme smo nato povezali v kategorije. Pri kodiranju smo sledili šestim korakom kvalitativne vsebinske analize (Mesec 1998): urejanje gradiva, določitev enot kodiranja, kodiranje, izbor in definiranje relevantnih pojmov in oblikovanje kategorij, definiranje kategorij in oblikovanje teoretične razlage ali pojasnitve. V osrednjem delu kodiranja podatkov smo objektivnost zagotavljali s triangulacijo. Kode sva najprej neodvisno določili avtorici, morebitna razhajanja sva rešili z diskusijo. Pri procesu kodiranja smo uporabili induktivni pristop, to pomeni, da si pred samim kodiranjem nismo pripravili seznama kod, temveč smo jih izpeljali neposredno iz podatkov med analizo besedila (Hesse-Biber in Leavy 2004). Skozi proces kodiranja so se oblikovali natančni kriteriji za pripadnost slike dani kodi. Če kode na ta način ni bilo mogoče enolično določiti, je v teh primerih kodo določil arbiter, ki je strokovnjak s področja zgodnjega poučevanja matematike. Po zaključenem kodiranju smo podatke obdelali z metodami kvantitativne metodologije in jih predstavili skozi deskriptivno in inferenčno statistiko. Uporabili smo χ^2 oz. po potrebi likelihood ratio oz. Kullbackov test $\chi^2_{(lr)}$. Da bi v svoji raziskavi okrepili veljavnost in zanesljivost ugotovitev, ki so nastale na podlagi analize podatkov, smo razen prej omenjene triangulacije predstavitev podkrepili s konkretnimi primeri risb, ki so jih podali anketiranci (Mesec 1998).

Za namene raziskave smo te tipe klasificirali v naslednje hierarhično razvrščene kategorije: slikovna vizualna reprezentacija (kategorija I), samo rezultat (kategorija II), koncept (kategorija III) in drugo (kategorija IV). V nadaljevanju kategorije podrobneje predstavimo z ilustrativnimi primeri.

Kategorija 1 – slikovna vizualna reprezentacija

V kategoriji 1 so odgovori, ki ne prikazujejo niti rezultata (vrednosti potence) niti koncepta potence kot matematične operacije. Slika 1 prikazuje dva primera slikovne vizualne reprezentacije. Levo je številka dve spremenjena v laboda, številka tri pa v metuljčka zaradi podobnosti med simbolom in objektom. Desno je osnova potence, število 2, prikazano z dvema medvedkoma, stopnja potence, število 3, pa je prikazano s tremi baloni, ki so prostorsko postavljeni desno nad medvedka, kot je tudi stopnja zapisana desno zgoraj nad osnovo. Obe risbi ne nosita nobene značilnosti koncepta potence, gre za neke vrste »ilustracijo« simbolnega zapisa.

Slika 1: Tip odgovora – slikovna vizualna reprezentacija (avtorja: bodoča učitelja razrednega pouka – Ružomberok)

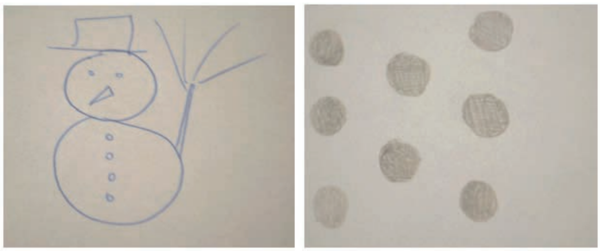
Kategorija 2 – samo rezultat

Udeleženci so z risbami *včasih* prikazovali samo rezultat izraza 2^3, tj. število *8*. Rezultat je bil podan na dva načina – kot simbol, števka 8, ali kot grafična ponazoritev števila 8, zato smo znotraj te kategorije izoblikovali dve podkategoriji, in sicer:

2.1 simbolna reprezentacija rezultata

2.2 vizualna reprezentacija rezultata

Slika 2 levo prikazuje številko 8, ki je verjetno zaradi navodil preoblikovana v snežaka (kategorija 2.1), desno pa je narisanih 8 pik (kategorija 2.2).



Slika 2: Vrednost potence 2^3 na simbolni in slikovni način (avtorja: bodoči učitelj matematike, dijak)

Kategorija 3 – koncept

Kategorija 3 vključuje odgovore, znotraj katerih je bilo zaznati prikazovanje koncepta neke računske operacije. Udeleženci so se s tem odgovorom odmaknili od golega podajanja rezultata in poskušali prikazati operacijo. Znotraj te kategorije smo izoblikovali dve podkategoriji: prikaz potence in prikaz drugega koncepta. Pri potenci smo dodatno ločevali med shematsko vizualno reprezentacijo potence in prepletanjem slikovne vizualne in simbolne reprezentacije potence. Kategorija koncept se torej deli na:

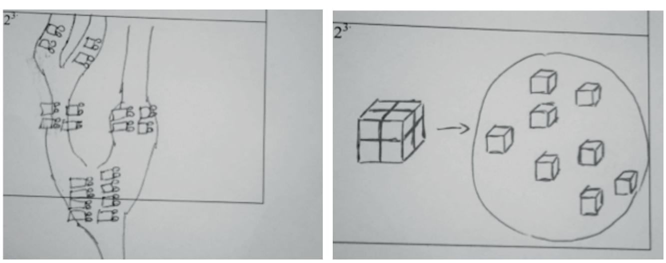
3.1 potenca

3.1.1 shematska vizualna reprezentacija

3.1.2 prepletanje slikovne vizualne in simbolne reprezentacije

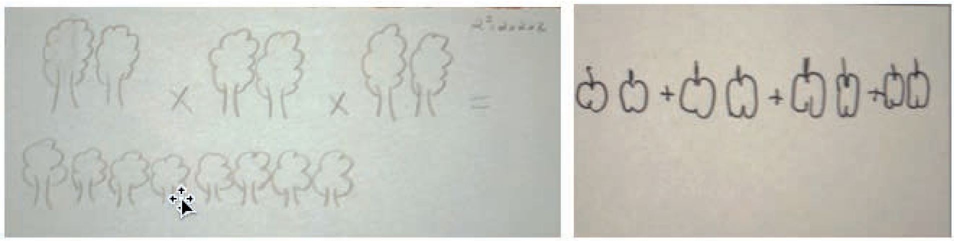
3.2 drug koncept

Na sliki 3 vidimo primera, na katerih je shematsko vizualno prikazan koncept potence (kategorija 3.1.1). Levo je predstavljen kot število avtomobilov, ki se razvrščajo v ceste, desno pa kot število kock, ki so potrebne za izgradnjo večje kocke z robom 2.



Slika 3: Shematska vizualna reprezentacija potence (avtorja: dijak, bodoči učitelj razrednega pouka)

Koncept pa je bil včasih prikazan s prepletanjem slikovne vizualne reprezentacije in simbolov, kar prikazuje slika 4 (kategorija 3.1.2). Slika 4 levo prikazuje koncept potence, desno pa je prikazan koncept 2 + 2 + 2 + 2 (kategorija 3.2). Vsota je sicer enaka 8, tako kot pri vrednosti 2^3, vendar gre za drug koncept, tj. seštevanje enakih seštevancev.



Slika 4: Koncept potence 2^3 in koncept 2 + 2 + 2 + 2 (avtorja: dijak, dijak)

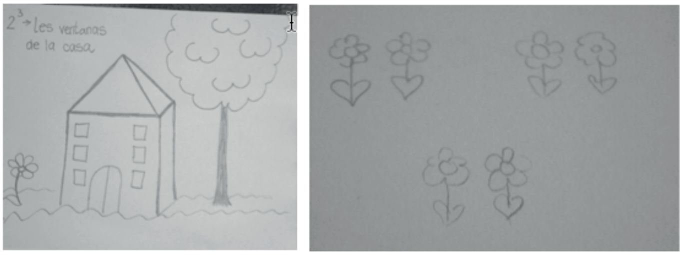
Kategorija 4 – drugo

V kategorijo drugo smo uvrstili anketirance, ki odgovora niso podali, in odgovore, ki jih je bilo nemogoče razvrstiti v druge kategorije (slika 5).

Slika 5: Primer risbe iz kategorije drugo

Rezultati in interpretacija

Najprej poglejmo rezultate glede na prepoznavanje vrednosti potence. Če je bilo na risbi zaznati 8 objektov, se je rezultat vrednotil kot prepoznano pravilen, če je bilo zaznati drugačno število objektov, pa kot prepoznano nepravilen. Če vrednosti ni bilo mogoče prepoznati, ne moremo trditi, da anketiranci pravilne vrednosti niso poznali. Prazna polja (anketiranec ni odgovoril) so se vrednotila posebej. Vrednost potence 2^3 je kot 8 na tak ali drugačen način podalo 60,9 % vseh sodelujočih; 33,1 % sodelujočih je podalo odgovor, iz katerega ni bilo mogoče razbrati vrednosti izraza (prim. slika 1), oz. odgovora niso podali, 6 % pa je podalo vrednost, ki je bila prepoznana kot nepravilna, tj. različna od 8 (prim. slika 6). Med 29 udeleženci, ki so podali prepoznano nepravilen odgovor, je 12 tujih bodočih učiteljev razrednega pouka, 9 slovenskih bodočih učiteljev razrednega pouka, 5 dijakov in 3 bodoči učitelji matematike.



Slika 6: Shematska vizualna reprezentacija drugega koncepta: zapis 2^3 je razumljen kot $2 \cdot 3$ oz. 6 oken na hiši/ rož (avtorji: bodoči učitelj razrednega pouka iz Španije, dijak)

Preglednica 1 podrobneje prikazuje podatke. Vidimo, da so vrednost izraza kot 8 v največjem deležu podajali slovenski bodoči učitelji razrednega pouka (82,9 %). Ugotovimo lahko, da so prepoznano nepravilno vrednost (skoraj vedno 6) v največjem deležu podali bodoči učitelji razrednega pouka s Slovaške in Španije. Ugotovimo, da so dijaki podali približno 17-krat več prepoznanih pravilnih odgovorov kot nepravilnih, bodoči učitelji matematike približno 5-krat več, bodoči učitelji razrednega pouka iz Slovenije približno 15-krat in bodoči učitelji razrednega pouka iz tujine približno 5-krat več prepoznanih pravilnih kot prepoznanih nepravilnih odgovorov za vrednost potence 2^3. Razlike med skupinami pri pravilnosti odgovora so tudi statistično značilne ($\chi^2_{(lr)} = 74{,}280$; P = 0,000).

Preglednica 1: Vrednost potence 2^3

	Dijaki gimnazijskega programa	**Študenti FNM UM (bodoči učitelji matematike)**	**Študenti PEF UM (bodoči učitelji razrednega pouka)**	**Tuji študenti PEF UC in PEF UR (bodoči učitelji razrednega pouka)**	**Skupaj**
8	58,5 %	33,3 %	82,9 %	45,2 %	60,9 %
Različno od 8	3,4 %	6,3 %	5,5 %	9,7 %	6,0 %
Ni mogoče ugotoviti	38,1 %	60,4 %	11,6%	45,2 %	33,1 %
Skupaj	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %

Za interpretacijo tega je treba dodati, da bodoči učitelji matematike odgovora niso podali (oz. ga ni bilo mogoče razbrati) v nenavadno visokem deležu (60,4 %), zato ne moremo sklepati, da je izračunavanje vrednosti preproste potence za njih problematično. Nagibamo se k temu, da se je navodilo »Nariši risbo«, bodočim učiteljem matematike zdelo tuje, naloga se jim je zdela nesmiselno lahka in so se zato odločili, da odgovora ne podajo. Pri bodočih učiteljih matematike je bila to namreč edina možnost za kategorijo »odgovora ni mogoče razbrati«. Dodatno ugotovimo, da so dijaki najmanjkrat odgovorili prepoznano nepravilno in da so študenti razrednega pouka v ustreznosti slikovne predstave prehiteli kolege na predmetni stopnji. Bodoči učitelji razrednega pouka na Slovaškem in v Španiji so se odrezali slabše kot njihovi slovenski kolegi. Razlog iščemo v drugačni strukturi izobraževanja. Tako na Slovaškem kot v Španiji je namreč na predhodnem nivoju izobraževanja mogoče izbrati nivo matematike.

V nadaljevanju predstavljamo rezultate glede na kategorijo odgovorov. V kategoriji drugo so zajeti tako tisti anketiranci, ki odgovora niso podali, kot tisti, katerih odgovora ni bilo mogoče razvrstiti.

Preglednica 2: Kategorije odgovorov glede na skupine vzorca

	Dijaki gimnazijskega programa	**Študenti FNM UM (bodoči učitelji matematike)**	**Študenti PEF UM (bodoči učitelji razrednega pouka)**	**Tuji študenti PEF UC in PEF UR (bodoči učitelji razrednega pouka)**	**Skupaj**
Kategorija 1: slikovna vizualna reprezentacija	14,3 %	8,3 %	2,4 %	31,5 %	14,1 %
Kategorija 2: samo rezultat	12,9 %	20,8 %	20,1 %	24,2 %	19,0 %
Kategorija 3: koncept	63,9 %	47,9 %	72,6 %	34,7 %	57,8 %
Kategorija 4: drugo	8,8 %	22,9 %	4,9 %	9,7 %	9,1 %

Iz preglednice 2 je razvidno, da je več kot polovica vseh udeležencev (57,8 %) poskušala prikazati koncept, 14,1 % pa je zapis 2^3 predstavilo le s slikovno »ilustracijo«. Nekoliko manj kot petina (19,0 %) udeležencev je pojem razumela na čisto računskem nivoju, tj. kot podajanje rezultata. Slovenski študenti programa Razredni pouk izstopajo, ker so kar najbolj poskušali prikazati koncept, zapis pa so ilustrirali v najmanjšem deležu. Izstopajo tudi tuji študenti, pri katerih so kategorije porazdeljene bolj enakomerno kot pri drugih. Pri njih je zaznati tudi največji delež slikovnih vizualnih reprezentacij in podajanja rezultata. Obstajajo statistično značilne razlike v kategoriji odgovora med skupinami udeležencev ($\chi^2_{(lr)} = 82{,}009$; $P = 0{,}000$). Rezultat je dokaj pričakovan, še posebej če upoštevamo dejstvo, da se učitelji razrednega pouka v času svojega študija srečajo z didaktičnimi napotki za različne načine predstavitev potence z naravnim eksponentom, pri predmetnih učiteljih pa te potrebe ni, ker se ta pojem na njihovi stopnji poučevanja smatra kot usvojen. Slednji se bolj kot z vizualnimi reprezentacijami osnovnih pojmov ukvarjajo z dokazi, posplošitvami itd. (abstraktni nivo).

V nadaljevanju si poglejmo podkategorije pri kategorijah samo rezultat in koncept nekoliko natančneje. Najprej si oglejmo kategorijo samo rezultat. Udeleženci so podali samo rezultat oz. vrednost potence 2^3. Prikazali so torej število 8. Ta odgovor kaže bolj na proceduralno kot na konceptualno znanje. Udeleženci, ki so odgovarjali na ta način, verjetno dojemajo nalogo izrazito proceduralno, pomemben jim je le rezultat, ne pa sam koncept. Na ta način je podalo odgovor 92 udeležencev, od tega jih je 19 zapisalo simbol za število, ki jim je predstavljalo vrednost potence, 73 udeležencev pa je narisalo toliko objektov (npr. črtic, jabolk ...). Preglednica 3 podaja frekvence glede na skupine udeležencev.

Preglednica 3: Reprezentacija pri podajanju rezultata

	Dijaki gimnazijskega programa	Študenti FNM UM (bodoči učitelji matematike)	Študenti PEF UM (bodoči učitelji razrednega pouka)	Tuji študenti PEF UC in PEF UR (bodoči učitelji razrednega pouka)	Skupaj
Kategorija 2.1: simbolna	5,6 %	60,0 %	21,2 %	16,7 %	20,9 %
Kategorija 2.2: vizualna	94,4 %	40,0 %	78,8 %	83,3 %	79,1 %

Največ so vizualno prikazovali dijaki. Sledijo slovenski in tuji bodoči učitelji razrednega pouka, pri katerih je rezultat približno štirikrat pogosteje vizualni kot simbolni. Simbolni prikaz s številko so najpogosteje izbirali bodoči učitelji matematike, pri katerih verjetno prevladuje razmišljanje na simbolni ravni nad razmišljanjem na vizualnem nivoju. Razlike med skupinami so tudi statistično značilne ($\chi^2_{(lr)}$ = 10,924; P = 0,012). Statistično značilnih razlik med skupino, ki je podala odgovor 8, in skupino, ki je podala odgovor, različen od 8, glede na reprezentacijo ne najdemo ($\chi^2_{(lr)}$= 1,136; P = 0,286).

Oglejmo si sedaj podkategorije še pri odgovorih, ki so poskušali prikazati »koncept«. Na tak način je odgovorilo največ, in sicer 279 udeležencev (57,8 %). Tukaj najprej opazujemo, ali so prikazali koncept potence (to je storilo 176 udeležencev oz. 63 % od vseh 279) ali pa so prikazovali kak drug koncept (to so storili 103 udeleženci oz. 37 % od vseh 279). Najpogosteje prikazana druga koncepta sta bila 2 · 3 oziroma 3 · 2 ter 4 · 2 oziroma 2 + 2 + 2 + 2. Preglednica 4 podaja natančnejše podatke glede na skupine udeležencev.

Preglednica 4: Podajanje koncepta potence oz. drugega koncepta glede na vzorec

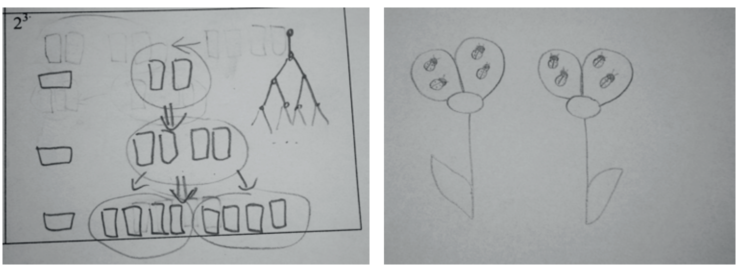
	Dijaki	Študenti FNM (bodoči učitelji matematike)	Študenti PeF (bodoči učitelji razrednega pouka)	Tuji študenti (bodoči učitelji razrednega pouka)	Skupaj
Kategorija 3.1.1: shematska vizualna reprezentacija potence	16,0 %	13,0 %	63,9 %	20,9%	36,9 %
Kategorija 3.1.2: prepletanje slikovne vizualne in simbolne reprezentacije potence	51,1 %	52,2 %	5,0 %	16,3 %	36,9 %
Kategorija 3.2: drugi koncept	33,0%	34,8%	31,1%	62,8%	26,2%
Skupaj	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Osredotočimo se le na tiste udeležence, ki so (pravilno) podali koncept potence, in opazujmo, kolikšen delež jih je potenco podal s shematsko vizualno predstavitvijo. Podobno kot pri podajanju rezultata ugotovimo, da so bodoči učitelji razrednega pouka najbolj nagnjeni k vizualnim predstavitvam, dijaki in bodoči učitelji matematike pa se nagibajo k predstavitvam, ki vključujejo tako vizualizacijo kot simbole. Bodoči učitelji razrednega pouka so verjetno zaradi načina izobraževanja, ki jih spodbuja k razmišljanju o vizualnih reprezentacijah, podajali take odgovore. Tako pri dijakih v gimnaziji kot pri izobraževanju bodočih učiteljev matematike pa se prevladujoče uporabljajo simbolne reprezentacije. Tudi tukaj obstajajo statistično značilne razlike med sodelujočimi v načinu podajanja koncepta ($\chi^2_{(lr)}$= 100,554; P = 0,000).

Diskusija

Naši rezultati kažejo, da je nekoliko več kot polovica anketirancev navodilo »Narišite risbo, ki prikazuje 2^3«, interpretiralo tako, da so prikazovali koncept (potence ali katere druge operacije). Približno 15 % jih je 2^3 le »okrasilo« oz. spremenilo v ilustracijo, nekoliko manj kot petina udeležencev pa je navodilo razumela kot »Izračunaj vrednost in le to prikaži z risbo«. Čeprav kognitivni pristopi enakovredno poudarjajo strategije reševanja problemov kot rešitve problemov, je nagnjenost k pridobivanju rezultatov pri pouku matematike še vedno zelo pogosta, kar odražajo tudi naši rezultati.

V naši raziskavi je bila potenca vizualno prikazana na različne načine. Prevladovali so trije načini. Tretjina udeležencev je upodobila strukturo cepitve. Med odgovori je bil prisoten drevesni prikaz (slika 7 levo in slika 12 desno), ki ga za to strukturo kot vizualno reprezentacijo navajata tudi Conferey in Smith (1995), vendar se je pogosto pojavljala še ena vizualna reprezentacija strukture cepitve. Imenovali jo bomo ugnezdeni prikaz (slika 7 desno in slika 12 levo). V ugnezdenem prikazu se verzije originala ne upodobijo linearno, ampak koncentrično. Na levi strani slike 7 vidimo drevesni prikaz 2^3, ki izpostavi zaporedno množenje, desno pa vidimo koncentrični ugnezdeni prikaz množenja z 2. Na dveh rožah s po dvema listoma sta po dve pikapolonici. Vrednost potence, tj. 8, je na drevesnem prikazu mnogo težje odčitati kot v ugnezdenem prikazu. Pri drevesnem prikazu prikažemo vse verzije originala, ki nastajajo ob zaporednem množenju in zato vrednosti potence s slike ne moremo direktno prebrati. Pri ugnezdenem prikazu pa je prikazan tako koncept potence kot tudi njena vrednost.



Slika 7: Cepitev – drevesna struktura in ugnezdena struktura (avtorja: bodoči učitelj matematike, bodoči učitelj razrednega pouka – Slovenija)

Primeri situacij, ki se lepo prikažejo z ugnezdenim prikazom, so npr. dvoje jopic/hiš/jablan, na vsaki jopici/hiši/jablani sta po dva gumba/okni/jabolki, v vsakem gumbu/oknu/jabolku sta po dve luknji/lončnici/črva (prim. slika 12). Ko se učenci prvič srečajo s potenco, so stari približno 10 let. Raziskave kažejo, da je v tej starosti drevesni prikaz za učence še (pre)težka reprezentacija (English 2013).

Druga tretjina udeležencev je potenco upodobila s prepletanjem simbolov in slik, kjer so narisali npr. dva kvadratka – simbol krat (·) – dva kvadratka – simbol krat (·) – dva kvadratka (slika 4 levo). Ta prikaz ni zajet v kategorizaciji, ki sta jo predlagala Hegarty in Kozhevnikov (1999), zato predlagamo, da se k shematski in slikovni kategoriji v vizualni reprezentaciji doda še slikovno-simbolna kategorija. Ob spodbudi, da ponazorijo 2^3, je nekoliko več kot četrtina udeležencev izbralo napačni koncept, zelo pogosto je šlo za linearni koncept $2 \cdot 3$. Na tem delu naši rezultati podpirajo rezultate, ki so jih dobili de Bock et al. (2007) o problematičnosti nelinearnega načina razmišljanja. Menimo, da bi nelinearnost lahko spodbudili s primernim slikovnim prikazom.

Zaključek

Vizualizacija matematičnih pojmov je plodno razvijajoče se raziskovalno področje (Presmeg 2014). Odprti problemi, ki se pojavljajo na tem področju, so vezani na mnoge vidike, npr. na individualne razlike ali na vlogo IKT pri vizualizaciji.

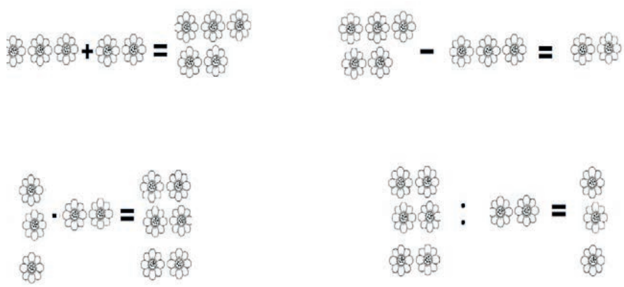
Shematska vizualna reprezentacija koncepta se za učence večkrat izkaže težja kot sam proceduralni, tj. računski del. Pouk matematike v nižjih razredih osnovne šole poteka od konkretnega preko slikovnega k simbolnemu nivoju reprezentacije. Slikovni nivo žal ni vedno dober vir shematskih vizualnih reprezentacij pri učencih. Na sliki 8 sta situaciji, ki sta na razredni stopnji prepoznani kot slikovni nivo, čeprav slike ne nosijo konceptualne (relacijske) komponente matematičnih pojmov v nalogi. Z drugimi besedami, gre za slikovne vizualne reprezentacije. Slika besedilni nalogi sicer vizualno doda kontekst pridelave vina, morda tudi uzavesti količinsko vrednost merske enote, a iz nje učenec ne razbere informacije, ki bi mu bistveno pomagala pri reševanju. Pri drugi nalogi slike vedra, klobuka itd. le nadomeščajo v matematiki sicer bolj običajne oznake (npr. *x, y* ...) in služijo predvsem motivacijskim namenom.

Slika 8: Dva tipa slikovne vizualne reprezentacije (kontekstualizacijska in motivacijska) Vir: http://eucbeniki.sio.si/test/iucbeniki/index.html, Asikainen et al. (2008)

Vizualne reprezentacije so shematske, če prikazujejo bistvene (prostorske) odnose koncepta, slikovne vizualne reprezentacije pa karakterizira le konkretna vizualizacija objektov, ki nastopajo v problemu. Shematska vizualna reprezentacija števila 17 na sliki 9 levo s postavitvijo 10 + 7 nakazuje mestnovrednostni kocept, slikovna reprezentacija števila 17 na sliki 9 desno pa prikazuje le zunanje značilnosti nastopajočih objektov.

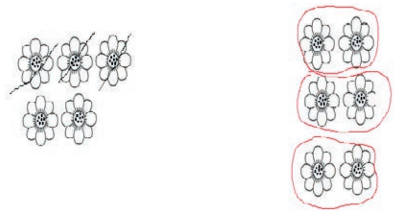
Slika 9: Shematska vizualna in slikovna vizualna reprezentacija števila 17

Na osnovi spoznanj lahko sklepamo, da leva slika spodbuja sposobnost reševanja matematičnih problemov, desna pa to sposobnost celo zavira (Hegarty in Kozhevnikov 1999). Učitelji posledično zaradi primanjkljaja shematskih vizualnih reprezentacij v njihovih virih izpostavljajo težave, ki nastanejo, ko iz konkretnega manipuliranja s predmeti preidejo na slikovni nivo. Znan je primer, ko učenci s slike, ki prikazuje 5 objektov, od katerih sta 2 prečrtana, zapišejo simbolno predstavitev (Hodnik Čadež 2014). Učitelji zaradi podobnih težav večkrat izpuščajo vizualne ponazoritve ali pa jih opremijo s proceduralnimi navodili, *npr. preštej vse, zapiši število, zapiši minus, preštej prečrtane* … Taka navodila seveda niso usmerjena v razumevanje, ampak učenca silijo v izvajanje postopka, ki ga ni osmislil. Učitelji, ki želijo učencem »olajšati« zapis računa ob sliki, včasih uporabijo prepletanje slike in simbolov (npr. Children's Addition b. d.); to za seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje prikazuje slika 10.



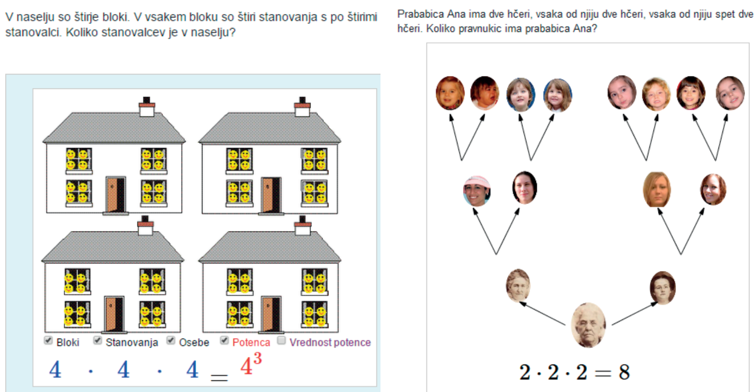
Slika 10: Prepletanje slike in simbolov

Tovrstni prikazi za pouk matematike na razredni stopnji niso ustrezni. Za odraslo osebo so sicer lahko jasni, otroci pa se z matematičnimi simboli šele seznanjajo in jih šele povezujejo s koncepti, ki jim ustrezajo. Risba deljenja (spodnja desna na sliki 10) je lahko za otroka še posebej nejasna. Če imamo npr. 6 rož, k jih delimo v skupine po dve roži, dobimo 3 skupine s po dvema rožama, česar pa risba na sliki 10 ne prikazuje. Ustrezne prikaze vidimo na sliki 11; risba na levi prikazuje seštevanje in odštevanje, kar pripomore k povezovanju osnovnih računskih operacij. Na desni risbi so obkrožene skupine po dve roži, kar prikazuje množenje in deljenje ($3 \cdot 2$, $6 : 3$). Menimo, da so takšne risbe mnogo boljši spodbujevalec koncepta v učni situaciji.



Slika 11: Shematske vizualne predstavitve

Na osnovi naših rezultatov in predhodnih ugotovitev učiteljem pri vpeljevanju pojma potenca priporočamo shematske vizualne prikaze cepitve v ugnezdenem prikazu. Po razmejitvi, ki jo predlaga Hodnik Čadež (2003), bi ugnezdeni prikaz sodil k semikonkretni reprezentaciji, drevesni prikaz pa k semiabstraktni reprezentaciji. To pomeni, da je razvojno lažji in po našem mnenju zato bolj primeren v začetnih stopnjah učenja. Takšne predstavitve že najdemo tudi v nekaterih slovenskih gradivih. Na sliki 12 sta primera cepitev iz e-učbenikov za matematiko za 5. in 6. razred.



Slika 12: Shematska vizualna reprezentacija potence s cepitvijo v ugnezdenem prikazu in shematska vizualna reprezentacija potence s cepitvijo v drevesnem prikazu. Vir: http://eucbeniki.sio.si/test/iucbeniki/index.html

Menimo, da gre za primer dobre prakse, saj se ugnezdeni prikazi pojavljajo še v 6. in 8. razredu in je tako prehod k potencam z negativnim eksponentom (8. razred) in kasneje racionalnim eksponentom (predvidoma 2. letnik gimnazije) bolj konceptualno zastavljen. Seveda pa je za potrditev te hipoteze treba zastaviti novo raziskavo.

Darja Antolin
Urška Lipovec

Schematic Visual Representation of Exponentiation

At the beginning of elementary school mathematical symbols are presented through drawings. Visualization of mathematical concepts is an effective learning and teaching strategy. In mathematics classes it is mostly present at iconic level. Visual representations are divided into schematic and pictorial ones. Schematic representations are defined as visual representations that show significant (spatial) relations of the problem and pictorial representations are characterized by a concrete visualization of the objects that appear in the problem. Previous research shows that schematic visual representation is positively correlated with the ability of solving mathematical problems while this correlation is negative for pictorial visual representation since a concrete mental image can dissuade the solver from essential relationships, which a solver should be aware of in order to effectively solve problems. Since students have a positive attitude towards inclusion of visual representations in the process of problem solving, teachers should use schematic visual representations more frequently. In this paper we present the study that aimed at investigating the presence of shematic visual representation of power 2^3 among secondary school students and among future teachers of mathematics ($N = 483$). The sample consisted of 147 secondary school students, 48 pre-service mathematics teacher students from the Faculty of Natural Sciences and Mathematics at the University of Maribor and 164 pre-service elementary teaching students from the Faculty of Education at the University of Maribor. Part of the sample includes participants from outside Slovenia: 79 from the University of Cordoba, Spain, and 45 from the Catholic University of Ružomberok in Slovakia, together 124. Participants were provided with very scant instruction, namely: Draw a drawing of 2^3. The received responses were first evaluated with respect to the correctness of the value of the exponentiation, after that the combination of quantitative and qualitative methods was used for data analysis. We used qualitative content analysis in which we looked for specific themes or codes through a systematic process of coding. These themes were then linked into categories. In the main part of the coding objectivity was achieved through triangulation. Each of the authors analysed the data independently, any discrepancies were resolved through discussion. In the coding process, we used an inductive approach, which means that before the actual coding we didn't prepare a list of codes; the codes were derived directly from the data during the analysis of the text. Based on the developed categorization we discussed the following types of responses: pictorial, only the result (pictorial or symbolic) exponentiation, the concept of the exponentiation or other concept, and others. After coding we used quantitative methodology and presented data through descriptive and inference statistics. The findings show that schematic visual representation appeared only in little more than a third of all drawings and that participants are much more oriented to representing the result than the concept. More than half of the participants attempted to demonstrate the concept, but unfortunately slightly more than one tenth of the participants illustrated the expression. Only slightly less than one fifth of participants understood the instruction in a procedural way, i.e. as presenting the result. Although cognitive approaches equally emphasize problem-solving strategies and solutions to the problems, the tendency to obtaining results in mathematics is still very common. Slovenian primary school teaching students stand out as the largest share of them present the concept and on the other hand the smallest share illustrate the term. Also the group of foreign students stands out since in this group the categories are distributed more evenly than in others. Moreover, the largest proportion of illustrations and presenting the result was detected among foreign students. The findings show that there are statistically significant differences in the category of responses between groups of participants. Approximately two thirds of the drawings that didn't illustrate the result or expression represented the concept of power. The remaining third of the drawings showed other concepts, the most frequently $2 \cdot 3$ and $4 \cdot 2$. Additionally, the findings showed that among the participants who adequately demonstrated the concept almost half of the drawings consisted of an intertwinement of mathematical symbols and images. We believe that for a person who has already built the concept of power the intertwinement is unobtrusive but students may have problems with that representation since sometimes they do not even perceive symbols. In the paper we point out intertwinement of symbols with representations and potential dangers of such an approach on the examples of basic arithmetic operations. In conclusion we add methodical guidance on introducing the concept of power through the structure of nested fission, which leads to a more conceptual understanding of this elementary mathematical concept.

LITERATURA

Asikainen, Katariina, Haapaniemi, Sirpa, Mörsky, Sirpa, Tikkanen, Arto, Voima, Juha. 2008. *2b Tuhattaituri*. Keuruu: Otava.

Conferey, Jere, Smith, Eric. 1995. Splitting, covariation, and theire role in development of exponential functions. *Journal of Research in Mathematics Education*. 26 (19): 66–86.

de Bock, Dirk, van Dooren, Win, Janssens, Dirk, Verschaffel, Lieven. 2007. *The Illusion of Linearity. From Analysis to Improvement*. Springer.

David, Maria M., Tomaz, Vanessa S., Costa Ferreira, Maria C. 2014. How visual representations participate in algebra classes mathematical activity. *ZDM Mathematics Education*. 46: 95–107.

English, Lynn. 2013. Children's Strategies for Solving Two- and Three-Dimensional Combinatorial Problems. *Journal for Research in mathematics Education*. 24 (3): 255–273.

Güler, Gürsel, Çiltaş, Alper. 2011. The visual representation usage levels of mathematics teachers and students in solving verbal problems. *International Journal of Humanities and Social Science*. 1 (11): 145–154.

Hegarty, Mary, Kozhevnikov, Maria. 1999. Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*. 91 (4): 648–689.

Hesse-Biber, Sharlene N., Leavy, Patricia. 2004. Distinguishing qualitative research. V *Approaches to qualitative research*, (ur.) Sharlene N. Hesse-Biber in Patricia Leavy, 1–15. New York: Oxford University Press, Inc.

Hodnik Čadež, Tatjana. 2003. Pomen modela reprezentacijskih preslikav za učenje računskih algoritmov. *Pedagoška obzorja*. 18 (1): 3–22.

Hodnik Čadež, Tatjana. 2014. *Poučevanje matematike v luči sodobnih raziskav. Plenarno predavanja na Konferenci o učenju in poučevanju matetike KUPM*, 22. Avgust, Čatež, Slovenija. http://www.zrss.si/kupm2014/files/gradiva/petek/CadezHodnik.pdf (Pridobljeno 24. 10. 2014)

Lipovec, Alenka. 2006. Kaj imajo skupnega Gari Kasparov, Jamie Oliver in ozonske luknje? *Presek*. 33 (1): 4–6.

Mesec, Bojana. 1998. *Uvod v kvalitativno raziskovanje v socialnem delu*. Ljubljana: Visoka šola za socialno delo.

Presmeg, Norma C. 1992. Prototypes, Metaphors, Metonymies, And Imaginative Rationality in High School Mathematics. *Educational Studies in mathematics*. 23 (6): 595–610.

Presmeg, Norma C. 2014. Contemplating visualization as an epistemological learning tool in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*. 46 (1): 151–157.

Rivera, Ferdinand. 2010. Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*. 73 (3): 297–328.

Rivera, Ferdinand. 2014. From math drawings to algorithms: emergence of whole number operations in children. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*. 46 (1): 59–77.

Smith, Mark K. 2002. *Jerome S. Bruner and the process of education*.

Dr. Darja Antolin, Pedagoška fakulteta, Univerza v Mariboru, darja.antolin@um.si

Urška Lipovec, študentka Biotehniške fakultete Univerze v Ljubljani, urska.lipovec@gmail.com