Dr. Alenka Lipovec, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta, alenka.lipovec@uni-mb.si

Darja Antolin, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta, darja.antolin@uni-mb.si

Alenka Vaupotič, alenka.vaupotic@gmail.com

Ulomki v vrtcu

Izvirni znanstveni članek

UDK 373.2:51

POVZETEK

V prispevku predstavljamo področje začetnih konceptov razumevanja racionalnih števil v vrtcu oz. vpeljevanje delov celot v vrtec. Na osnovi literature ugotavljamo, da je razvijanje zgodnjih konceptov ulomkov smiselno že v predšolskem obdobju, čeprav slovenski kurikul za vrtce te vsebine ne podpira. Pripravili smo nekatere kontekstualizirane naloge, ki so vključevale geometrijski in merljivi model ulomkov ter so se v tujini že izkazale kot učinkovite. V raziskavi, v katero smo vključili predšolske otroke, stare 5 let, so otroci naloge reševali individualno ob podpori odrasle osebe. Zanimalo nas je, kakšne so razlike pri reševanju nalog o delih celote med otroki, ki so imeli predhodne izkušnje z deli celot, in otroki, ki so se s to vsebino prvič srečali na končnem preverjanju en mesec po izvedenem eksperimentu z eksperimentalno skupino. Podatki, ki smo jih zbrali s pomočjo opazovalnega lista, so pokazali, da so otroci, ki so vsebino že poznali, naloge reševali brez večjih težav. Otroci iz eksperimentalne skupine so bili na končnem preverjanju sicer uspešnejši od otrok iz kontrolne skupine, ki so se s problemi spoprijemali prvič, kljub temu pa so tudi otroci iz kontrolne skupine prikazali dovolj znanja, da lahko sklepamo, da so bile naloge pripravljene primerno njihovi razvojni stopnji.

Ključne besede: pouk matematike, deli celote, ulomki, vrtec, pedagoški eksperiment

Fractions in Kindergarten

ABSTRACT

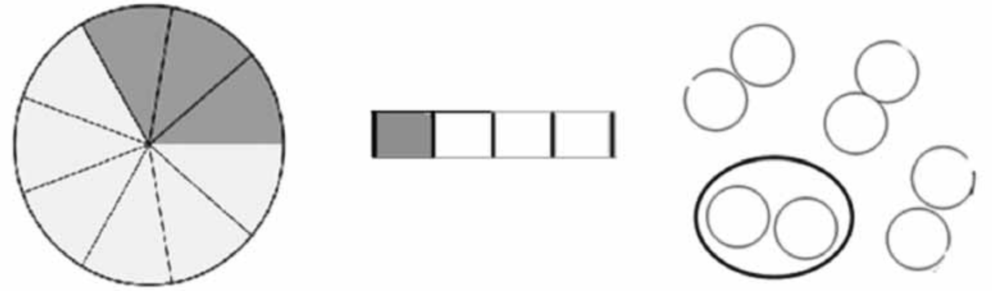
This article presents the initial concepts of understanding rational numbers in kindergarten, and the introduction of fractions in kindergarten. Based on relevant literature, we have established that the development of early concepts of fractions is reasonable in the pre-school period already, although the Slovenian kindergarten curriculum does not foresee it. We have prepared some contextualized tasks involving geometric and measurable model of fractions, which have already proven effective elsewhere. For the purpose of research, children were asked to solve those tasks individually with the support of adults. The research involved pre-school children at the age of five. We were interested to discover the differences in solving fractions tasks between children who had previous experience with fractions and those who first came into contact with this content on the day of the retention test, that is, a month later. The information we obtained through observation sheets have shown that children who were already familiar with the content solved the test tasks without major difficulties. Thus, the children in the experimental group performed better in their final examination than the children in the control group, who were confronted with fractions for the first time. However, the children in the control group also demonstrated sufficient knowledge, so we can conclude that the tasks prepared were appropriate with regard to their developmental stage.

Key words: mathematics education, parts of a whole, fractions, kindergarten, pedagogical experiment

Uvod

Otrokovo razumevanje ulomkov so preučevali že Piaget, Inhelder in Szeminska (1960), ki so z otroki, starimi od štiri do sedem let, razdeljevali torto med različno število punčk. O zgodnjem razvoju koncepta ulomka, ki velja za enega težjih matematičnih pojmov, je bilo v preteklosti narejenih kar nekaj raziskav. V devetdesetih letih je skupina raziskovalcev (Behr, Wachsmut, Post in Lesh, 1984) ugotovila, da otroke pri učenju ulomkov pogosto moti ideja o celem številu. To se tudi kasneje kaže najbolj očitno na primeru seštevanja ulomkov, kjer se interferenca s celimi števili pokaže v mnenju, da ulomke seštevamo tako, da seštejemo števca in imenovalca ulomkov. Hunting (1986) je predpostavil, da se celoštevilska ideja tako močno usidra v kognitivne sheme zato, ker se spoznavanje z ulomki predolgo odlaga, in predlagal zgodnejše seznanjanje s temi koncepti, seveda na otroku primeren način. Davis (1989) je navedel še dva druga vzroka za okrnjeno znanje o racionalnih številih, to sta omejeno razumevanje delov celote in algoritmično znanje o pridobivanju pojma polovica, ter ugotavljal, da je te sheme zelo težko spremeniti, ko so enkrat usidrane. Zdi se, da se raziskovalci strinjajo, da je temeljna ideja področja odnos med delom in celoto (Pitkehtly in Hunting, 1996). Singer Freeman in Goswami (2001) v svoji raziskavi navajata dva načina seznanjanja z deli celote, in sicer preko zvezne količine (pica, kruh ...) ali preko nezvezne ali diskretne količine (bombonjera). Da bi ugotovili, kako gredo otroci skozi proces oblikovanja delov celote in kako postavljene naloge vplivajo na odgovor, je bilo tudi v novejšem času izvedenih več raziskav (Lamon, 1999; Empson, 2002; Brizuela, 2005). Izkazalo se je (Kieren, 1983), da je količinska predstava polovice dobro razumljena in da učinkovite aktivnosti temeljijo na razdeljevanju. Naloge razdeljevanja so bile običajno sestavljene v obliki kontekstualizirane zgodbe tipa »Imamo tri kvadratne kolačke, ki jih je treba razdeliti med dva prijatelja tako, da vsak dobi popolnoma enak del. Koliko dobi vsak?« Težavnost problema se spreminja s številom vpletenih oseb, vrsto stvari, ki jih delimo (kolački, deli žvečilnega gumija, tablice čokolade), in prisotnostjo oziroma uporabo modela. Na začetku otroci reči razdeljujejo eno po eno, po partitivnem modelu deljenja. Ko se ta postopek konča, ostanejo deli, ki jih ne morejo razdeliti vsakemu po enega, in spoprijeti se morajo z deljenjem celote.

Velika večina učencev mora dolgo uporabljati konkretne modele, da lahko razvijejo miselno predstavo, ki je potrebna za konceptualno razmišljanje o ulomkih. Miselne predstave, ki jih učenci razvijejo s pomočjo modelov, jim omogočajo razumeti količinsko vrednost ulomka kot števila (Cramer in Henry, 2001). Modeli, s katerimi lahko konkretno ravnamo, omogočajo več priložnosti za poskušanje, napake in raziskovanje. Včasih je potrebno, da vzgojitelji za isto aktivnost uporabijo več različnih modelov, saj bo otrok te aktivnosti pogosto dojemal kot popolnoma različne. Na področju ulomkov uporabljamo tri tipe modelov: območja oziroma geometrijske modele, trakove oziroma merljive modele in množice oziroma aritmetične modele (slika 1).



Slika 1: Modeli ene četrtine

Geometrijski modeli so primerni za začetek uvajanja delov celote, predvsem pri nalogah razdeljevanja. Gre za modele, ki se lahko razrežejo na manjše dele. Med najpogosteje uporabljenimi geometrijskimi modeli so okrogli tortni modeli (slika 2). Glavna prednost tortnega modela je, da poudari količino, ki ostane pri sestavi celote. Drugi geometrijski modeli so še: pravokotni modeli, geoplošča, ploščice za vzorčke, risbe na pikčastem papirju, zlaganje papirja ... Pri merljivih modelih je v ospredju primerjava dolžin. To so lahko narisane črte, ki so razdeljene na manjše dele, ali konkretni materiali, npr. trakovi, vrvice … Primeri merljivih modelov so npr. Cuisenairove paličice (slika 2), risbe delov daljice, preloženi trakovi papirja, številska premica … Pri aritmetičnih modelih celoto razumemo kot množico predmetov, npr. skupino link kock (slika 2). Podmnožice pa predstavljajo dele celote. Na primer: trije predmeti so četrtina v množici dvanajstih predmetov. V tem primeru množica dvanajstih predmetov predstavlja celoto ali 1. Prav zaradi ideje, da množica predmetov predstavlja celoto, so aritmetični modeli nekoliko težji. Kljub temu pa prav ti modeli pomagajo vzpostaviti pomembno povezavo z mnogimi vsakdanjimi primeri uporabe ulomkov, kot je npr. ugotavljanje vrednosti popusta, ki ga dobimo, če se izdelek poceni za npr. petino.

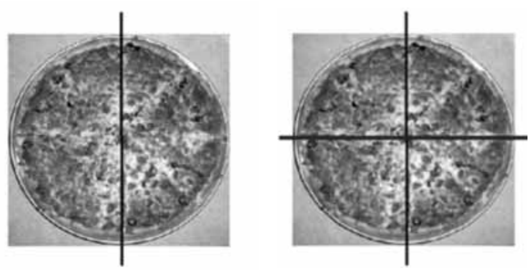
Slika 2: Ponazorila ulomkov
Vir: http://www.teaching.com.au/

V raziskavi, ki sta jo izvedla Hunting in Sharpley (1988), smo zasledili kontekstualizirane naloge, skozi katere se vrtčevski otroci seznanjajo z deli celote, in se odločili, da jih preizkusimo tudi s slovenskimi otroki. V slovenski literaturi namreč ni zaslediti obsežnejših gradiv za dele celote, ki bi bili naravnani na predšolsko obdobje, saj se vsebina obravnava kot zahtevna in neprimerna za mlajše otroke. Toda tuji viri tega ne potrjujejo. Zaradi nasprotja med tujimi in slovenskimi viri se zdi pomembno preučiti, ali oz. kako slovenski otroci dojemajo preprostejše koncepte delov celote (polovica, tretjina, četrtina …), in če jih, pripraviti metodično ustrezno gradivo za delo v vrtcu. V okviru pedagoškega eksperimenta, ki smo ga izvedli v vrtcu, smo zato raziskovali dva vidika. Najprej nas je zanimalo, kako učinkoviti bodo otroci pri reševanju nalog o delih celote s pravo pico in v situaciji s pico na plastificirani podlagi, pri nalogah z razdeljevanjem vrvice in pri nalogah z razdeljevanjem glinene klobase. Poleg tega smo ugotavljali, ali so otroci motivirani, sproščeni, uspešni, vedoželjni, ali se bodo pri reševanju problemov posvetovali z vzgojiteljem ter ali bodo raziskovali različne možnosti.

Metodologija

Raziskava temelji na neslučajnostnem oz. priložnostnem vzorcu predšolskih otrok. Vključili smo skupino 12 otrok, starih od 5 let in 5 mesecev do 5 let in 7 mesecev. Starostna razlika med njimi je bila torej največ dva meseca. Eksperimentalno skupino, v kateri smo uvajali nove metodične pristope, je sestavljalo osem otrok, od tega štiri deklice in štirje dečki, kontrolno skupino pa štirje dečki. Eksperimentalno skupino smo razdelili v štiri podskupine (eksperimentalna skupina 1, eksperimentalna skupina 2 ...), kontrolno skupino pa v dve podskupini (kontrolna skupina 1 in kontrolna skupina 2). Po pregledu literature, ki se navezuje na raziskovalni problem, smo sestavili opazovalni list za vzgojiteljico ter pripravili naloge in pripomočke za otroke. Zapisali smo kriterije opazovanja afektivnega vidika (opazovali smo sproščenost, vedoželjnost, raziskovanje možnosti in posvetovanje z odraslo osebo) in kodiranja uspešnosti (na lestvici od 1 do 4) ter metodične napotke za pedagoški eksperiment.

V raziskavi smo se posvetili le zveznim količinam, razlik med zveznimi in diskretnimi primeri nismo preučevali; uporabili smo geometrijski in merljivi model. Eksperimentalna skupina 1 je reševala nalogo s pravo pico (slika 3). Otroka sta morala pico razdeliti najprej na pol, nato na četrtine, nato pa sta pico »raziskovala« na osnovi vprašanj odrasle osebe. Navajamo nekatera izmed vprašanj, ki se navajajo na celoto, polovico in četrtino. *Koliko delov pice imamo na krožniku? Pico razdeli na pol. Koliko polovic imaš na krožniku? Če polovici razdeliš še enkrat na pol, kaj dobiš? Na koliko četrtin je razdeljena pica? Če odvzameš eno četrtino, koliko četrtin ti ostane na krožniku? Če odvzameš dve četrtini, koliko četrtin ostane na krožniku? Sedaj polovici pice dodaj eno četrtino. Koliko četrtin imaš na krožniku? Če polovici odvzameš eno četrtino, koliko četrtin ostane na mizi? Iz četrtin, ki jih imaš na krožniku, sestavi polovico. Vse četrtine sestavi. Kaj dobiš?*



Slika 3: Pica, ki sta jo otroka razpolovila in razdelila na četrtine

Eksperimentalna skupina 2 je reševala nalogo s pico na sliki. Otroka sta morala s flomastrom pobarvati dele pice. Sledila so ista vprašanja kot pri nalogi s pravo pico.

Eksperimentalna skupina 3 je reševala problem, povezan s punčko in vrvico (slika 4), ki sta bili na mizi (v začetni situaciji ena kolebnica za eno punčko). Nato smo dodali še eno punčko. Otrok naj bi vrvico razdelil na dva enaka dela, tako da bi vsaka punčka imela svojo kolebnico. Če mu je uspelo, smo mu ponudili še tretjo punčko in novo vrvico, ki jo je moral razdeliti na tri enake dele, da bi imela vsaka punčka enako dolgo kolebnico.

Slika 4: Rezanje kolebnice za punčke in deljenje glinene klobase

Otrokoma v eksperimentalni skupini 4 smo dali nalogo z glineno klobaso (slika 4). Najprej sta dobila eno glineno klobaso za eno punčko. Nato smo dodali še eno punčko in v primeru smiselne rešitve še eno.

Za prvi dve eksperimentalni skupini smo uvedli tudi kontrolni skupini, ki sta naloge reševali na končnem preverjanju en mesec po izvedenem eksperimentu z eksperimentalno skupino. Vsako kontrolno skupino sta sestavljala dva otroka. Kontrolna skupina 1 je imela enako nalogo kot eksperimentalna skupina 1 – reševala je nalogo s pravo pico. Otroka sta morala pico razdeliti najprej na pol, nato na četrtine, nato pa sta pico »raziskovala«. Ponovili smo ista vprašanja kot pri eksperimentalni skupini 1. Kontrolna skupina 2 je imela enako nalogo kot eksperimentalna skupina 2 – reševala je nalogo s pico na sliki. Otroka sta morala s flomastrom pobarvati dele pice. Sledila so ista vprašanja kot pri eksperimentalni skupini 2.

Rezultati

Razlike med prvo in drugo eksperimentalno skupino so bile pričakovane, a smo predpostavljali, da bo prva skupina uspešnejša od druge, kar bi bilo v skladu z Brunerjevo teorijo reprezentacijskih nivojev. Izkazalo se je, da je bila hrana pravzaprav omejujoč faktor. Pri reševanju naloge s pravo pico smo dobili občutek, da se otroka pice bojita oz. da čutita odpor do prijemanja hrane, zato je bilo potrebno precej motivacije. Pica na sliki je bila precej bolj zanimiva, saj sta otroka njene dele barvala zelo natančno in tudi razpolovila sta jo hitreje.

Težava pri nalogi s pico, tako pri pravi pici kot pri pici na sliki, se je pokazala takrat, ko je bila pica razdeljena na 4 kose in se je preizkušal koncept ekvivalentnih ulomkov. Otroci so na začetku težko dojeli, da je ena polovica enaka dvema četrtinama, saj so zmeraj vzeli en kos pice ali ga pokazali na sliki. Šele ob dodatnem vodenju so se strinjali, da je polovica pice enaka dvema četrtinama. Pri merljivem modelu (nalogi s kolebnico) sta se otroka najprej lotila naloge tako, da sta kolebnico prerezala na točki, ki je ležala med dvema punčkama, položenima na mizi, čeprav nastali kolebnici nista bili enako dolgi. Do preverjanja smiselnosti rešitve ni prišlo pred posegom odrasle osebe. Tudi pri tretjinah sta kolebnico prerezala na točkah med položajem punčk na mizi. Sama spet nista začutila potrebe po preverjanju rezultata, kar je v skladu z ugotovitvami raziskave, ki sta jo izvedla Hunting in Sharpley (1988). Šele po dodatni spodbudi sta prerezana kosa primerjala in ugotovila, da kolebnice niso enako dolge.

Oglejmo si tudi primerjavo med rezultati kontrolne in eksperimentalne skupine, pridobljenimi na dan končnega preverjanja, tj. en mesec po tem, ko so otroci iz eksperimentalne skupine izvedli prej opisane aktivnosti, otroci iz kontrolne skupine pa so se z nalogami o delih celote srečali prvič. Navedena so povprečja rezultatov, ki so jih otroci dosegali pri različnih nalogah. Opazovalni list je izpolnjevala vzgojiteljica oddelka. Vsakega otroka je ocenila na lestvici od 1 do 4, pri čemer je 1 pomenilo, da se z izkazovanjem tega vidika pri opazovanem otroku ne strinja, 4 pa, da se popolnoma strinja.

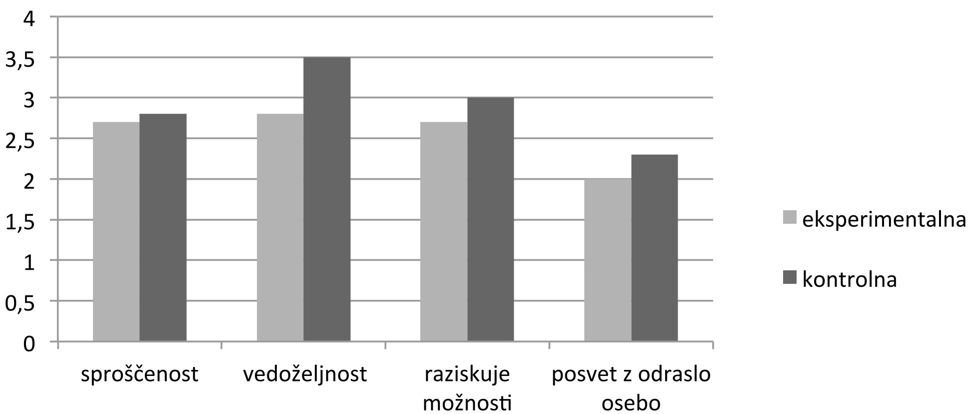


Diagram 1: Primerjava eksperimentalne in kontrolne skupine

Rezultati na diagramu 1 kažejo, da je bila sproščenost pri obeh skupinah dokaj enaka, pri otrocih v kontrolni skupini celo nekoliko višja, kar je presenetljivo, saj so se ti otroci na dan preverjanja prvič srečali tako z izvajalko preverjanja kot z nalogami o delih celote, in pričakovali bi, da bodo bolj zadržani oz. nesproščeni.

Otroci iz kontrolne skupine so bili tudi bolj vedoželjni – opaziti je bilo, da so imeli veliko željo, da bi naloge še ponovili ali poskusili še katero drugo nalogo o delih celote – tudi pogosteje so se posvetovali glede reševanja z vzgojiteljico, večkrat so vprašali za nasvet ali potrditev za rešeno nalogo. Tudi glede raziskovanja možnosti so prednjačili pred otroki iz eksperimentalne skupine. Več so raziskovali najverjetneje zato, ker so bile naloge za njih nove in so jim predstavljale izziv, otroci iz eksperimentalne skupine pa so naloge poznali že od prej. Posledično so otroci iz eksperimentalne skupine tudi pri posvetovanju dosegli nižje povprečje, saj so naloge poznali in so vedeli, kako jih morajo rešiti, zato nasvetov niso potrebovali.

Eksperimentalna skupina pa izstopa predvsem po uspešnosti, ki je v kontrolni skupini opazno nižja. Kot smo že ugotovili, je razlog predvsem ta, da so otroci iz eksperimentalne skupine naloge poznali, in jim niso delale večjih težav, v nasprotju z otroki iz kontrolne skupine, ki so jim bile naloge povsem nove.

Oglejmo si še podrobneje uspešnost reševanja nalog po dnevih in rezultat na končnem testu.

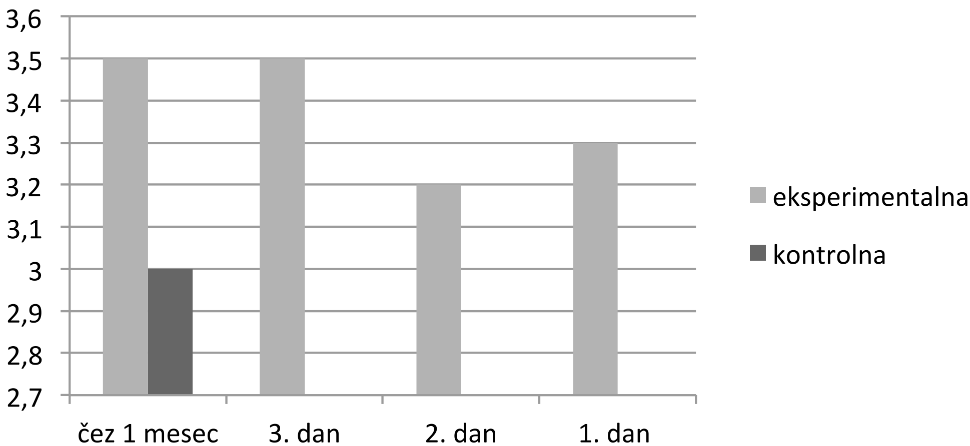


Diagram 2: Uspešnost reševanja nalog o delih celote pri otrocih iz eksperimentalne in kontrolne skupine

Rezultati uspešnosti, prikazani na diagramu 2, so v času trajanja eksperimenta precej nihali. Uspešnost se je najbolj pokazala tretji dan in čez en mesec, najmanj pa drugi dan.

Drugi dan je pri otrocih predvidoma prihajalo do kognitivnega konflikta, začeli so dvomiti v svoje znanje in predvidevanja, kar bi po Piagetu pomenilo prehod v fazo akomodacije miselnih struktur. Ob natančnejšem pregledu rezultatov, zbranih v preglednici 1, ugotovimo, da so otroci drugi in tretji dan bistveno bolj sproščeno in vedoželjno raziskovali različne možnosti, pri čemer so se tudi več posvetovali z odraslo osebo, kar potrjuje našo domnevo. Odrasla oseba je v primeru, če jo je otrok prosil za nasvet, poskušala izzvati otrokovo lastno miselno aktivnost in ni dajala namigov oz. vodila otroka do rešitve.

	1. dan	2. dan	3. dan	čez 1 mesec	
	eksperimentalna				kontrolna
sproščenost	3,3	3,6	3,6	2,7	2,8
vedoželjnost	2,5	3	3,2	2,8	3,5
raziskovanje možnosti	2,1	2,6	2,8	2,7	3
posvetovanje z odraslo osebo	1,1	2	1,5	2	2,3
uspešnost	3,3	3,2	3,5	3,5	3

Preglednica 1: Zbirni podatki povprečij opazovalnih listov

Ugotovimo lahko tudi, da se znanje je usidralo v kognitivne sheme otrok, kajti tudi po mesecu dni je bila uspešnost eksperimentalne skupine višja od uspešnosti kontrolne skupine. Otroku je potrebno omogočati izkušnje z deli celot, da jih spoznava, saj se s tem izkaže večja uspešnost. Ugotovitve so v skladu z ugotovitvami raziskave, ki sta jo izvedla Singer Freeman in Goswami (2001). Ugotavljamo, da aktivnosti s področja delov celote v predšolskem obdobju pozitivno vplivajo na znanje s tega področja, pri čemer je predznanje pomemben dejavnik.

Med izvajanjem pedagoškega eksperimenta smo imeli možnost otroke spoznati in opazovati pri delu. Otroci so pokazali dobre rezultate, se potrudili pri nalogah in se naučili nekaj novega. Nismo pričakovali, da bodo pri nalogah tako uspešni. S svojimi sposobnostmi so nas pozitivno presenetili. Najbolj so bili uspešni pri nalogah s polovico, manj pri tretjinah, še manj pri četrtinah, kar je v skladu z ugotovitvami nekaterih raziskav (npr. Hunting in Sharpley, 1988), vendar v nasprotju z raziskavami, ki po težavnosti navajajo zaporedje 1/2, 1/4 in 1/3 (Pothier in Sawada, 1983). Zadnje raziskave temeljijo na dejstvu, da algoritmično zaporedno razpolavljanje deluje kot omejujoč faktor pri razvoju particijskih shem za ulomke z lihim imenovalcem. Žal nam velikost vzorca ne omogoča posploševanja in zato ostaja ta problem odprt.

Sklep

Smiselnost vpeljave ulomka v vrtcu smo preverili s pedagoškim eksperimentom, kjer je vsak otrok individualno izvajal kontekstualizirane aktivnosti, povezane z deli celote. Tri dni zaporedoma so petletniki po vnaprej zapisanem metodičnem postopku izvajali aktivnosti, vezane na ulomke, in čez mesec dni smo preverili njihovo znanje. Rezultati, ki smo jih pridobili z metodo eksperimenta, so za slovenski šolski prostor novi in ponujajo nov uvid v zasnovo predšolskega kurikula, ki trenutno ne vsebuje ciljev v povezavi z racionalnimi števili. Otroci so se nalog lotili zavzeto, motivirano in z zanimanjem. Rezultati kažejo, da so bili uspešni. Primerjava kontrolne in eksperimentalne skupine je pokazala, da so bili otroci iz eksperimentalne skupine bolj uspešni tudi po mesecu dni, kar kaže na trajnost pridobljenega znanja. Dodatno naj omenimo, da so tudi otroci iz kontrolne skupine pri končnem preverjanju pokazali dokaj visoko uspešnost, iz česar lahko sklepamo, da je vsebina razvojno primerna za vrtčevsko okolje.

V predšolskem izobraževanju zato predlagamo naslednje poudarke na področju zgodnjega razvoja konceptov ulomkov: razvijanje ideje del – celota, vključevanje geometrijskega in merljivega modela, dosledna kontekstualizacija. Odprto pa puščamo vprašanje zaporedja (polovica, četrtina, tretjina) in začetne koncepte ekvivalentnih ulomkov (dve četrtini sta enako mnogo kot ena polovica). Ugotovili smo namreč, da so slovenski otroci že v vrtcu sposobni razumeti osnovne koncepte ulomkov, če so le predstavljeni v njim smiselni kontekstualizirani situaciji ob uporabi modelov. Na osnovi otrokovega neformalnega intuitivnega znanja zato lahko razvijamo inicialne koncepte ulomkov predvsem skozi aktivnosti razdeljevanja. Odrasla oseba naj bo pozorna na raznolikost situacij predvsem s strukturnega vidika tipa modela, saj sta otrokom v vrtcu bližja geometrijski in merljivi model. Posebej pozorni smo na razvoj količinske predstave ene polovice v primerjavi z eno tretjino, pri čemer najprej razvijamo aktivnosti razpolavljanja in šele kasneje aktivnosti tretjinjenja.

Predlagamo, da kadrovske šole posebno pozornost posvetijo matematičnemu znanju za poučevanje bodočih vzgojiteljic in vzgojiteljev. Zdi se namreč, da je področje ulomkov za vzgojitelje oz. vzgojiteljice nevralgična točka, saj imajo sami kar nekaj napačnih predstav o ulomkih, zaradi katerih na to vsebinsko področje gledajo kot na izrazito težko oz. neprimerno za predšolsko izobraževanje.

LITERATURA

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. in Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15* (5), 323–341.

Brizuela, B. M. (2005). Young Children'S Notations For Fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *62* (3), 281–305.

Cramer, K. in Henry, A. (2002). Using manipulative models to build numbers sense for addition of fractions. V B. H. Litwiller (ur.), *Making sense of fractions, ratios and proportions: 2002 yearbook* (str. 42–48). Reston, VA: NCTM.

Davis, G. E. (1989). Attainment of rational number knowledge. V N. Ellerton in K. Clements (ur.), *The Challenge to Change* (str. 31–42). Victoria, Mathematical Association of Victoria.

Empson, S. B. (2002). Organizing diversity in early fraction thinking. V B. H. Litwiller (ur.), *Making sense of fractions, ratios and proportions: 2002 yearbook* (str. 29–40). Reston, VA: NCTM.

Hunting, R. P. (1986). Rachel's schemes for constructing fraction knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 49–66.

Huntig, P. in Sharpley, C. (1988). Fraction Knowlendge in Preschool Children. *Jurnal for Research in Matematics Education*, *19* (2), 175–180.

Kieren, T. E. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas. V M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak in M. Suydam (ur.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (str. 506–508). Boston: Birkhiu-ser.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding, Lawrence Erlbaum and Associates*. Mahwah, NJ.

Piaget, J., Inhelder, B. in Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. New York: Basic Books.

Pitkehtly, A. in Hunting, R. (1996). A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *30* (1), 5–38.

Pothier Y. in Sawada, D. (1983). Partitioning: the emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14* (4), 307–317.

Singer Freeman, K. in Goswami, U. (2001). Does half a pizza equal half a box of Chocolates? Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development*, 16, 811–829.

Van de Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*. Boston: Pearson cop.