ANαliZA

časopis za kritično misel

Letnik 17, številka 4, december 2013 · ISSN 1408-2969

FILOZOFIJA MATEMATIKE

Paul Benacerraf

Matematična resnica

prevedla Iris Merkač

Citiranje: Paul Benacerraf, »Matematična resnica«, *Analiza: časopis za kritično misel* 17, št. 4 (2013): 115–130.

Prevod. Licenca Creative Commons, ki velja za arhiv revije, za prevode ne velja; pravice izvirnika pripadajo njegovim imetnikom.

Izdajatelj: Društvo za analitično filozofijo in filozofijo znanosti, Ljubljana.

Elektronska različica je bila leta 2026 rekonstruirana iz izvirnih stavnih datotek in preverjena s tiskano izdajo. Številke strani ustrezajo tiskani izdaji; prelomi strani znotraj prispevka se lahko nekoliko razlikujejo.

Paul Benacerraf
Prevedla Iris Merkač

MATEMATIČNA RESNICA*

Čeprav je ta simpozij naslovljen kot »Matematična resnica« bom razpravljal tudi o vprašanjih, ki so nekoliko širša, vendar kljub temu vsebujejo pojem matematične resnice v svojem bistvu in ki so sama odvisna od tega, kako je pravzaprav razložena resnica v matematiki. Najpomembnejše med njimi je matematično vedenje. Moja trditev je, da sta dve povsem različni vrsti skrbi ločeno motivirali razlage narave matematične resnice: (1) skrb za homogeno semantično teorijo, v kateri je semantika za matematične propozicije/stavke vzporedna s semantiko za ostali del jezika,[1] in (2) skrb za to, da bi se razlaga matematične resnice ujela z dovolj razumno epistemologijo. Moja splošna teza bo, da lahko skoraj vse razlage pojma matematične resnice lahko istovetimo s tem, da služijo enemu ali drugemu od teh gospodarjev *na račun drugega.* Ker, dalje, verjamem, da je treba obe skrbi zadovoljiti s primerno katerokoli razlago, sem globoko nezadovoljen z vsakim paketom semantike in epistemologije, ki se dela, da razlaga resnico in vedenje tako znotraj kot zunaj matematike. Kajti, kot bom predlagal, razlage resnice, ki obravnavajo matematičen in ne-matematičen diskurz na ustrezno podobne načine, to počnejo tako, da puščajo nerazumljivo, kako lahko imamo kakršnokoli matematično vedenje; medtem ko tiste, ki pripisujejo matematičnim propozicijam vrste resničnostnih pogojev, za katere jasno vemo, da so izpolnjeni, to počnejo za ceno neuspeha povezati te pogoje s kakršnokoli analizo stavkov, ki kažejo, kako so dodeljeni pogoji ravno pogoji za njihove *resnice.* Kaj to pomeni, moram naposled nadrobno opredeliti, če hočem dokazati svoje trditve, in ne morem upati, da bi to storil znotraj tega omejenega konteksta. Kljub temu bom poskusil narediti dovolj jasno, da bi vam dopustil presoditi, ali je ali ni v tej trditvi karkoli obetajočega.

Domnevam, da je očitno, da mora vsaka filozofsko zadovoljiva razlaga resnice, reference, pomena in vedenja zajeti vse te, in mora biti primerna za vse

* Ta spis je bil predstavljen na simpoziju o Matematični resnici, ki sta ga skupaj podprla American Philosophical Association, Eastern Division in the Association for Symbolic Logic, 27. decembra 1973. Komentatorja sta bila Oswaldo Chateaubriand in Saul Kripke; njuni komentarji v tem trenutku niso na voljo. Različni segmenti zgodnje različice tega spisa (1967) so bili brani na Berkeleyu, Harvardu, čikaškemu krogu, Johns Hopkinsu, New York University, Princetonu in Yaleu. Zahvaljujem se za pomoč, ki sem jo prejel ob teh priložnostih kot tudi za številne komentarje moji kolegov na Princetonu, tako študentom kot učnemu osebju. Še posebej sem hvaležen Dicku Grandyju, Hartryju Fieldu, Adamu Mortonu in Marku Steinerju. Da se ti niso končali v znatnejših izboljšavah tega prispevka, je posledica zgolj moje trme. S to različico poskušam povzeti bistvo daljšega spisa, medtem ko spotoma delam manjše izboljšave. Prvotna različica je bila napisana v letih 1967 in 1968 z velikodušno podporo John Simon Guggenheim Foundation in Princeton University. To s hvaležnostjo priznam. [1] Tu se vdajam fikciji, da *imamo* semantiko za »ostali jezik«, ali, natančneje, da zagovorniki stališč, ki jemljejo svoje spodbude iz te skrbi, pogosto mislijo o samih sebi, kot da imajo tako semantiko vsaj za filozofsko pomembne segmente jezika.

[1] Tu se vdajam fikciji, da imamo semantiko za »ostali jezik«, ali, natančneje, da zagovorniki stališč, ki jemljejo svoje spodbude iz te skrbi, pogosto mislijo o samih sebi, kot da imajo tako semantiko vsaj za filozofsko pomembne segmente jezika.

propozicije, na katere se ti pojmi nanašajo.[2] Razlaga vedenja, za katero *se zdi*, da deluje za nekatere empirične propozicije o srednje velikih fizičnih objektih, toda ki ne zmore razložiti bolj teoretičnega vedenja, je nezadostna – ne le zato, ker je nepopolna, ampak zato, ker je lahko tudi napačna, tudi kot razlaga za stvari, za katere se zdi, da jih povsem ustrezno pokriva. Misliti drugače naj bi med drugim pomenilo prezreti medsebojno odvisnost našega vedenja na različnih področjih. In podobno velja za razlago resnice in reference. Teorija resnice za jezik, ki ga govorimo, v njem argumentiramo, teoretiziramo, matematiziramo itn., bi morala iz istega razloga preskrbeti podobne resničnostne pogoje za podobne stavke. Resničnostni pogoji, pripisani stavkoma, ki vsebujeta kvantifikatorja, bi morali na ustrezno podobne načine zrcaliti prispevek teh kvantifikatorjev. Vsak odmik od tako homogene teorije bi moral biti močno motiviran, da bi bil vreden razmisleka. Tak odmik, na primer, bi se lahko pokazal v teoriji, ki bi dala razlago o prispevku kvantifikatorjev v matematičnem sklepanju, ki naj bi bila drugačna od običajnega vsakodnevnega sklepanja o svinčnikih, slonih in podpredsednikih. David Hilbert je trdovratno vztrajal na taki razlagi v »On the Infinite«[3], o kateri na kratko razpravljam v nadaljevanju. Kasneje bom poskusil povedati več o tem, kakšnim pogojem bi jaz pričakoval, da bi morala zadostiti zadovoljiva splošna teorija resnice za naš jezik; prav tako pa bom poskusil povedati več o tem, kako bi se taka razlaga ujemala s tem, kar jemljem za razumno razlago vedenja. Zadostuje če tu povem, da četudi bo pogosto primerno predstaviti mojo razpravo v okviru teorij matematične resnice, bomo vedno morali imeti v mislih, da je tisto, za kar gre, ravno naše celotno filozofsko stališče. Trdil bom, da je kot *celotno stališče* nezadovoljivo – ne toliko zato, ker nam manjka dozdevna zadovoljiva razlaga matematične resnice ali zato, ker nam manjka dozdevno zadovoljiva razlaga matematičnega vedenja ampak zato, ker nam manjka vsakršna razlaga, ki zadovoljivo združuje oboje skupaj. Upam, da je konec koncev mogoče izdelati tako razlago; upam pa tudi, da nam bo ta spis pomagal to doseči, tako da bo izostril nekatere ovire, ki mu stojijo na poti.

I. Dve vrsti razlag

Razmislite o naslednjih dveh stavkih:

(1) Obstajajo vsaj tri velika mesta, starejša od New Yorka.

(2) Obstajajo vsaj tri popolna števila, večja od 17.

[2] V tem spisu dejansko nimam ničesar povedati o pomenu. Verjamem, da je ta pojem na zelo zasluženem slabem glasu, ampak ga jaz ne zavračam zaradi vsega tega. Nedavno delo, najbolj opazno je Kripkejevo, predlaga, da tisto, kar je dolgo časa veljalo za pomen – namreč fregejevski »smisel« – ima manj opravka z resnico, kot so Frege ali njegovi neposredni nasledniki mislili, da ima. Referenca je tisto, kar je verjetno najbolj tesno povezano z resnico, in bom iz *tega* razloga svojo pozornost omejil na referenco. Če je dovoljeno, da se sprememba reference zgodi brez ustrezne spremembe v pomenu, in da je resnica stvar reference, potem govor o pomenu v veliki meri ne sodi v snop problemov, ki nas skrbijo v tem spisu. Ti komentarji niso mišljeni kot argumenti, ampak le kot razlaga.

[3] Prevedeno in ponatisnjeno v Paul Benacerraf in Hilary Putnam, ur., *Philosophy of mathematics*, (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1964).

Ali imata ta stavka isto logično-slovnično obliko? Natančneje, ali sta oba oblike

(3) Obstajajo vsaj trije FG-ji, ki stojijo v razmerju *R* do *a*,

kjer je »Obstajajo vsaj trije« številčni kvantifikator, ki ga lahko odstranimo na običajen način v korist eksistencialnega kvantifikatorja, spremenljivk in identitete; *»F«* in *»G«* nadomestimo z enomestnima predikatoma, *»R«* z dvomestnim predikatom in *»a«* z imenom elementa univerzuma govora o kvantifikatorjih? Kaj sta resničnostna pogoja za (1) in (2)? Ali sta ustrezno vzporedna? Dovolite, d prezremo nejasnosti izrazov »veliko« in »starejše od« in enako posebnosti atributivnih-pridevniških konstrukcij v angleškem jeziku, ki razumeta veliko mesto kot nekaj, kar je obenem veliko in mesto, ampak bolj (čeprav ne natančno) k nekaj, kar je veliko *za* mesto. Ko smo enkrat dali stran te zapletenosti, se zdi jasno, da (3) natančno zrcali obliko od (1) in da bo tako (1) resničen, če in samo če se stvar, imenovana z izrazom, ki je nadomestil *»a«* (»New York«), nahaja v razmerju, označenem z izrazom, ki nadomesti *»R«* (»[1] je starejše od [2]«) z vsaj tremi elementi (v domeni govora o kvantifikatorjih), ki zadoščajo predikatoma, ki nadomestita *»F«* in *»G«* (»veliko« in »mesto«, v tem zaporedju). To je, sodim, tisto, kar bi nam povedala ustrezna definicija resnice. In mislim, da je pravilno. Torej, če je (1) resničen, potem je zato, ker določena mesta stojijo v določenih relacijah druga z drugim, itn.

Toda, kaj pa (2)? Ali naj uporabljamo (3) na enak način kot matrico za črkovanje pogojev *njegove* resnice? To zveni kot neumno vprašanje, na katero očitno odgovorimo s »seveda«. Kljub temu pa je zgodovina tega predmeta (filozofije matematike) videla veliko drugih odgovorov. Nekateri (vključno z enim od mojih preteklih in sedanjih sebstev[4]), ki se niso voljni soočiti s posledicami kombiniranja tega, kar sem naslovil kot »standardno« semantično razlago, s platonističnim stališčem o naravi števil, so se izogibali predpostavki, da so števniki imena in torej, po implikaciji, da ima (2) obliko (3). David Hilbert je (nav. delo) izbral drugačen, ampak prav tako različen pristop, ko je poskusil doseči zadovoljivo razlago uporabe pojma neskončnosti v matematiki. Po enem razumevanju lahko Hilberta obravnavamo, kot da bi izločil razred izjav in metod »intuitivne« (nazorne) matematike kot tistih, ki ne zahtevajo nadaljnjega upravičenja. Predpostavimo, da so vse te »končno preverljive« v nekem smislu, ki ni natančno določen. Na izjave aritmetike, ki nimajo te lastnosti – po navadi nekatere izjave, ki vsebujejo kvantifikatorje – Hilbert gleda kot na uporabna sredstva za prehod od »dejanskih« ali »končno preverljivih« izjav k »dejanskim« izjavam, tako kot instrumentalist razume teorije v naravoslovju kot način prehoda od enih opazovalnih stavkov k drugim opazovalnim stavkom. Te matematično »teoretske« izjave je Hilbert imenoval »idealni elementi«, njihovo uvajanje primerja z uvajanjem točk »v neskončnosti« v projektivni geometriji: uvedene so bile zgolj kot sredstvo, ki dela teorijo tistih stvari, ki nas resnično zanimajo, bolj

[4] Glej moj spis »What Numbers Could Not Be«, *Philosophical Review*, LXXIV, 1 (januar 1965): 47–73.

enostavno in elegantno. Če njihova vpeljava ne vodi do protislovja in če imajo te druge rabe, potem je upravičena: od tod iskanje dokaza konsistentnosti za popolni sistem aritmetike prvega reda.

Če je to razumna, četudi shematska razlaga Hilbertovega stališča, kaže, da ni jemal vseh kvantificiranih izjav kot medsebojno semantično enakovrednih. Zelo težko bi bilo dati semantiko za aritmetiko, kot jo je videl Hilbert. Toda težko ali ne, ta zagotovo ne bo obravnavala kvantifikatorja v (2) na enak način kot kvantifikatorja v (1). Hilbertovo stališče, kot je orisano, ravno predstavlja odkrito zanikanje, da je (3) model, po katerem je zgrajen (2).

Pri drugih takih razlagah so resničnostni pogoji za aritmetične stavke podani kot njihova formalna izpeljivost iz specificiranih množic aksiomov. Ko so se povezala z željo po pripisovanju resničnostne vrednosti vsakemu zaprtemu stavku aritmetike, so ta stališča zaminirali teoremi nepopolnosti. Lahko so bila obnovljena vsaj do notranje konsistence bodisi s pomočjo liberalizacije tega, kar se šteje za izpeljivost (na primer, z vključitvijo uporabe «-pravila v dopustnih izpeljavah), bodisi z opustitvijo želje po popolnosti. Zaradi pomanjkanja boljšega izraza in zato, ker se ti pogledi domala vselej osredotočajo na sintaktične (kombinatorne) značilnosti stavkov, bom taka stališča imenoval »kombinatorna« stališča določil matematične resnice. Vodilna ideja kombinatornih stališč je pripisovanje resničnostnih vrednosti aritmetičnim stavkom na podlagi nekaterih (običajno dokaznoteoretskih) sintaktičnih dejstev o njih. Pogosto je resnica definirana kot (formalna) izpeljivost iz nekaterih aksiomov. (Pogosto je izrečena zmernejša trditev – trditev resnice-v-S-u, kjer je *S* posamezni sistem, za katerega gre). V vsakem primeru, resnica v takih primerih očitno ni razložena v okviru reference, denotacije ali zadovoljitve. Ta predikat »resnice« je opredeljen sintaktično.

Podobno, nekatera stališča o resnici v aritmetiki, na podlagi katerih se je trdilo, da so Peanovi aksiomi »analitični« glede na pojem števila, so v mojem smislu tudi

»kombinatorna«. In take so tudi konvencionalistične razlage, saj je tisto, kar jih označuje kot konvencionalistične, kontrast med njimi in »realistično« razlago, ki analizira (2) tako, da ga prilagodi (1) preko (3).

Nazadnje, naredimo eno dodatno razlikovanje; neko stališče ni avtomatsko »kombinatorno«, če interpretira matematične propozicije, kot da so o kombinatornih zadevah, bodisi samo-referenčno bodisi drugače. Namreč, tako stališče lahko analizira matematične propozicije na »standardni« način v okviru imen in kvantifikatorjev, ki jih lahko vsebujejo, in v okviru lastnosti, ki jih pripisujejo objektom znotraj njihovih področij govora – kar pomeni, da je tukaj osnovni koncept *resnice* v bistvu Tarskijev. Razlika je v tem, da se njeni zagovorniki, četudi realisti pri svoji analizi matematičnega jezika, ločijo od platonistov pri razumevanju matematičnega univerzuma kot sestavljenega

izključno iz matematično nekonvencionalnih objektov: matematika je za njih omejena na metamatematiko in ta na sintakso.

Svojo ugotovitev o relativnih vrednostih teh različnih pristopov k resnici takih stavkov, kot je (2), bom odložil na kasnejše razdelke. Na tem mestu želim zgolj uvesti razliko med, na eni strani, tistimi stališči, ki pripisujejo očitno sintakso (in očitno semantiko) matematičnim izjavam, in, na drugi strani, onimi, ki ne upoštevajo očitne sintakse in semantike in poskušajo določiti resničnostne pogoje (ali podrobno določiti in razložiti obstoječo razdelitev resničnostnih vrednosti) na podlagi tega, kar so očitno nesemantične sintaktične obravnave. Na koncu bom trdil, da ima vsaka vrsta razlage svoje prednosti in pomanjkljivosti: vsaka se obrača k pomembni sestavini koherentne celovite filozofske razlage resnice in vedenja.

Ampak, kaj sta ti sestavini in kako sta med seboj povezani?

II. Dva pogoja

A. Prva sestavina takega celovitega stališča se bolj neposredno ukvarja s pojmom resnice. Za pričujoče namene jo lahko izrečemo kot zahtevo, da obstaja celovita teorija resnice, v okviru katere je lahko potrjeno, da je razlaga matematične resnice res razlaga matematične *resnice*. Razlaga naj bi implicirala resničnostne pogoje matematičnih propozicij, ki so očitno pogoji njihove resnice (in niso *samo*, recimo, pogoji njihovi teoremskosti v nekem formalnem sistemu). To ne pomeni *zanikanja*, da je lahko biti teorem nekega sistema resničnostni pogoj dane propozicije ali razreda propozicij. To prej pomeni zahtevo, da vsaka teorija, ki predlaga teoremskost kot pogoj resnice, tudi *razloži povezavo med resnico in teoremskostjo*.

Drug način postavljanja te prve zahteve zahteva, da je vsaka teorija o matematični resnici v soglasju s splošno teorijo resnice – teorijo teorij resnice, če želite –, ki potrjuje, da je lastnost stavkov, ki jih ta razlaga imenuje »resnica«, res resnica. To, se mi zdi, je mogoče storiti zgolj na osnovi neke splošne teorije vsaj za jezik kot celoto (domnevam, da paradokse obidemo na nek primeren način). Morda uporabnost te zahteve v prikazanem primeru velja le kot prošnja, da bi na semantični aparat matematike gledali kot na del tega naravnega jezika, v katerem je to storjeno, in da torej katerokoli *semantična* razlaga, ki smo jo nagnjeni dati za imena ali, bolj splošno, za singularne izraze, predikate in kvantifikatorje v maternem jeziku, vključuje tiste dele maternega jezika, ki jih označujemo kot matematinščino.

Predlagam da, če želimo izpolniti to zahtevo, ne smemo biti zadovoljni z nobeno razlago, ki ji spodleti obravnavati (1) in (2) na vzporeden način, po vzoru (3). Lahko morda obstajajo *razlike*, vendar pričakujem, da se te pojavljajo na ravni analize reference singularnih izrazov in predikatov. Verjamem, da imamo zgolj

eno tako razlago, namreč Tarskijevo, in da je njena bistvena značilnost definirati resnico v okviru reference (ali zadovoljitve) na podlagi posebne vrste sintaktičnosemantične analize jezika in torej, da mora biti vsaka domnevna analiza matematične resnice ravno analiza pojma, ki je pojem resnice vsaj v Tarskijevem smislu. Bolj primerno in izčrpno, verjamem, da ta zahteva ni v skladu z nobeno razlago, ki sem jih imenoval »kombinatorne«. Po drugi strani pa razlaga, ki priliči naš stavek (2) stavkoma (1) in (3), očitno izpolnjuje ta pogoj, tako kot to počnejo njene številne različice.

B. Moj drugi pogoj za celovito stališče predpostavlja, da imamo matematično vedenje in da tako vedenje ni nič manj vedenje zato, ker je matematično. Ker je naše spoznanje o resnicah ali pa ga je mogoče tako razumeti, mora biti razlaga matematične resnice, da bi bila sprejemljiva, skladna z možnostjo, da imamo matematično vedenje: pogoji resnice matematičnih propozicij nam ne morejo onemogočiti vedenja, da so zadovoljeni. To ne pomeni trditi, da ne more biti nespoznatnih resnic – pomeni le, ne morejo biti vse resnice nespoznatne, saj nekatere poznamo. Minimalna zahteva potem je, da mora biti zadovoljiva razlaga matematične resnice v skladu z možnostjo, da so nekatere take resnice spoznatne. Povedano bolj zahtevno, pojem matematične resnice, kot je razložen, mora ustrezati celoviti razlagi vedenja na tak način, da je razumljivo, kako imamo matematično vedenje, ki ga imamo. Sprejemljiva semantika za matematiko mora ustrezati sprejemljivi epistemologiji. Na primer, če vem, da je Cleveland med New Yorkom in Chicagom, je to zato, ker obstaja neka relacija med resničnostnimi pogoji za to izjavo in mojim trenutnim »subjektivnim« stanjem verjetja (kakršnekoli naj bi bile naše razlage resnice in vedenja, se morajo medsebojno povezati na ta način). Podobno mora na področju matematike biti možno povezati to, kaj za *p* pomeni, da je resničen, z mojim verjetjem, da *p*. Čeprav je to zelo megleno, mislim, da lahko vidimo, kako si drugi pogoj prizadeva izključiti razlage, ki izpolnjujejo prvega, in dopušča veliko tistih, ki ga ne izpolnjujejo. Kajti značilna »standardna« razlaga (vsaj v primeru teorije števil ali teorije množic) bo naslikala resničnostne pogoje v okviru pogojev za objekte, katerih narava, kot je običajno pojmovana, jih postavlja onstran dosega bolje razumljenih sredstev človeškega spoznanja (na primer, čutnih zaznav in podobno). »Kombinatorne« razlage, po drugi strani, običajno izhajajo iz občutljivosti za natančno to dejstvo in so zato skoraj vedno motivirane z epistemološkimi skrbmi. Njihova vrlina leži v zagotavljanju razlage matematičnih propozicij, ki temeljijo na postopkih, ki jim sledimo pri upravičevanju resničnih trditev v matematiki: namreč dokazu. Ni presenetljivo, da če *sprejmemo* take razlage matematične resnice, bo obstajalo zelo malo skrivnosti o tem, kako lahko pridobimo matematično vedenje. Potrebujemo zgolj razlago za našo zmožnost izdelave in pregleda formalnih dokazov.[5] Stiskanje

[5] Primerna izvedba je seveda velikanska naloga. Kljub temu bom pustil ob strani razlago bremena, ki ga nosi semantika sistema in naše razumevanje te semantike; namesto tega se osredotočamo na našo zmožnost določanja tega, da imajo določeni formalni objekti določene sintaktično definirane lastnosti.

balona na tej točki kajpak pomeni, da se očitno izboči na strani resnice: čim bolj natančno smo privezali pojem dokaza, čim bolj tesno smo povezali definicijo dokaza s kombinatornimi (prej kot semantičnimi) potezami, težje ga je povezati z resnico tistega, kaj je bilo tako »dokazano« – ali se vsaj tako zdi.

To sta potem ti dve zahtevi. Vsaka zase sta videti dovolj neškodljivi. V nadaljevanju bom obe še naprej zagovarjal in bom dal vsebino argumentu, v skladu s katerim se zdi, da skupaj izključujeta skoraj vsako razlago matematične resnice, ki je bila do zdaj predlagana. Po vrsti bom preučil dva osnovna pristopa k matematični resnici, ki sem ju omenil zgoraj, pretehtal njune sorazmerne prednosti v luči dveh temeljnih načel, ki jih predlagam. Upam, da bosta načeli sami – ko delam tako – prejeli nekaj razsvetlitve in podpore.

III. Standardno stališče

»Platonistično« razlago, ki analizira (2), kot da ima obliko (3), imenujem »standardno stališče«. Njegove vrline so številne in vredno jih je podrobno našteti, preden preidemo k premisleku njegovih hib.

Kot sem že pokazal, ta razlaga priliči logično obliko matematičnih propozicij obliki navidezno podobnih empiričnih propozicij: empirične in matematične propozicije podobno vsebujejo predikate, singularne izraze, kvantifikatorje itn.

Toda kaj narediti s stavki, ki niso sestavljeni (ali ki jih ni mogoče pravilno analizirati, kot da so sestavljeni) iz imen, predikatov in kvantifikatorjev? Bolj neposredno k bistvu, kaj narediti s stavki, ki ne spadajo v vrsto jezika, za katerega nam je Tarski pokazal, kako definirati resnico? Rekel bi, da za take jezike (če obstajajo) potrebujemo razlago resnice tiste vrste, ki jo je Tarski ponudil za »referenčne« jezike. Domnevam, da so resničnostni pogoji za jezik (npr. angleščino), za katerega se zdi, da pripada matematski, izdelani v skladu s smernicami, ki jih je artikuliral Tarski. Torej, do neke mere je vprašanje, ki je zastavljeno v prejšnjem razdelku – Kako razložiti resničnostne pogoje za (2)? mogoče interpretirati kot vprašanje, ali naj tisti fragment angleškega jezika, v katerem opravljamo matematiko, sprejema isto vrsto analize, za katero predpostavljamo, da je primerna za večino ostalega angleškega jezika. Če je tako, potem pomisleki, ki jih bom skiciral v naslednjem razdelku in zadevajo vprašanje, kako umestiti matematično vedenje v celotno epistemologijo, imajo očitno veljavo – čeprav jih morda lahko pokopljemo z ustrezno spremembo teorije. Če, po drugi strani, matematskega ne smemo analizirati v referenčnem stilu, potem očitno ne potrebujemo zgolj razlage resnice (tj., semantike) za to novo vrsto jezika, ampak tudi novo *teorijo o teorijah resnice*, ki poveže resnico referenčnih (kvantifikacijskih) jezikov z resnico za te nove (novo analizirane) jezike. Če bi imeli tako razlago, bi še vedno obstajala naloga razlage matematičnega vedenja, vendar bi bila domnevno lažja, saj bi v večini primerov novo semantično sliko matematskega spodbudili epistemološki premisleki. Tej

alternativi v tem spisu kajpada ne bom posvetil resne pozornosti, ker ne mislim, da jo je kdorkoli kadarkoli dejansko izbral. Za izbiro te je treba premisliti *in zavrniti* »standardno« interpretacijo matematičnega jezika, kljub njegovi površinski in prvotni verodostojnosti, in potem določiti alternativno semantiko kot nadomestek.[6] »Kombinatorni« teoretiki, o katerih razpravljam ali se na njih sklicujem, so po navadi želeli imeti svojo pogačo in jo tudi pojesti: niso se zavedali, da resničnostni pogoji, ki jih njihova razlaga ponuja za matematični jezik, niso bili povezani z referenčno semantiko, za katero domnevajo, da je *tudi* primerna za ta jezik. Morda je najbližja možna izjema Hilbert pri stališču, ki sem ga na kratko skiciral v uvodnih straneh tega spisa. Vendar, če bi temu sledili v nadaljevanju, potem bi nas to privedlo predaleč. Vrnimo se torej k naši hvali »standardnega stališča«.

Ena od njegovih glavnih prednosti je, da bodo imele definicije resnice za posamezne tako razumljene matematične teorije enake rekurzivne stavke kot te, ki smo jih uporabili za njihove manj vzvišene empirične rojakinje. Ali povedano drugače, vse so lahko štete kot deli istega jezika, za katerega ponujamo eno samo razlago za kvantifikatorje ne glede na to, katero pod-disciplino obravnavamo. Matematične in empirične discipline se ne bodo razlikovala glede na logično slovnico. Poudaril sem že, kako pomembna je ta prednost: pomeni, da nam bo logičnoslovnična teorija, ki jo uporabljamo v slabo poznanih in bolj prožnih domenah, rabila tudi tukaj. Delamo lahko z eno, enolično razlago in ne rabimo izmisliti si še eno za matematiko. To naj bi bilo res za skoraj vse slovnične teorije, povezane s semantiko, ki je primerna za razlago resnice. Moj predsodek glede tistega, kar imenujem »Tarskijevska teorija«, izhaja preprosto iz dejstva, da nam je Tarski dal edino življenja zmožno sistematično splošno razlago, ki jo imamo o resnici. Torej, ena posledica varčnosti, ki spremlja standardno stališče, je, da so logične relacije predmet enolične obravnave: ne spreminjajo se s spremembo našega predmeta obravnave. Dejansko pomagajo definirati pojem »predmeta«. Uporabljamo lahko ista pravila sklepanja in njihovo uporabo pojasnjujemo z isto teorijo, ki nas oskrbuje z našo običajno razlago sklepanja in se tako izognemo dvojnim merilom. Če zavrnemo standardno stališče, potem bo matematično sklepanje potrebovalo novo in posebno razlago. Kot stojijo stvari, so standardne uporabe kvantifikatorja v sklepanju upravičene z neke vrste dokazom zdravosti. Formalizacija teorij v logiki prvega reda zahteva za *svoje* upravičenje zagotovilo (ki ga nudi teorem popolnosti), da bodo vse logične posledice postulatov sledile kot teoremi. Standardna razlaga daje ta jamstva. Zdi se, da očitni odgovori delujejo. Če želite zavrniti standardno stališče, je treba zavreči te odgovore. In boste morali najti nove.

Toliko o jasnih prednostih te razlage. Kaj pa so njene hibe?

Kot sem predlagal zgoraj, je glavna napaka standardne razlage, da se zdi, da krši

[6] Včasih mislim, da je to ena od stvari, ki jo želi Hilary Putnam narediti v njegovem spodbujajočem članku »Mathematics without Foundations«, v tej reviji, LXIV, 1 (19. januar 1967): 5–22.

zahtevo, da je naša razlaga matematične resnice dovzetna za vključevanje v našo celotno razlago vedenja. Precej očitno, če bi hoteli sestaviti prepričljiv primer v ta namen, bi morali skicirati epistemologijo, za katero menim, da je vsaj približno pravilna in na osnovi katere bi se za matematične resnice, standardno razumljene, zdelo, kot da ne tvorijo vedenja. To bi zahtevalo daljši obvoz skozi splošne probleme epistemologije. To bom pustil za drugič in se zadovoljil s predstavljanjem kratkega povzetka o glavnih značilnostih tega stališča, ki najbolj neposredno zadevajo naš problem.

IV. Vedenje

Podpiram vzročno razlago vedenja, po kateri to, da bi *X* vedel, da je *S* resnično, zahteva neko vzročno relacijo med X-om in referenti imen, predikatov in kvantifikatorjev S-ja. Poleg tega verjamem v vzročno teorijo *reference*, s čimer naredim povezavo z mojim zavedajočim govorjenjem, da S, *dvojno* vzročno. Upam, da bo to, kar sledi, razpršilo nekaj megle, ki obdaja to formulacijo.

Da bi Hermione vedela, da je črni predmet, ki ga drži, gomoljika, mora biti (ali se vsaj od nje zahteva), da je v nekem (morda psihološkem) stanju.[7] Zahteva tudi sodelovanje s preostalim svetom, vsaj v obsegu dopuščanja, da je predmet, ki ga Hermione drži, gomoljika. Nadalje – in to je del, ki bi ga poudaril – v normalnem primeru mora to, da je črni predmet, ki ga Hermione drži, gomoljika, na ustrezen način nastopiti v vzročni razlagi njenega verjetja, da je črni predmet, ki ga drži, gomoljika. Toda, kaj je »ustrezen način«? Tega ne bom poskusil povedati.

Številni avtorji so objavili stališča, za katera se zdi, da kažejo v to smer,[8] in zdi se, kljub razlikam med njimi, da obstaja jedrna intuicija, ki jim je skupna in za katero mislim, da je pravilna, čeprav jo je zelo težko natančno določiti.

Da mora biti neko tako stališče pravilno in da to utemeljuje naše pojmovanje vedenja, vidimo iz tega, kar bi povedali v naslednjih okoliščinah. Trdi se, da *X* ve, da *p*. Mi pač menimo, da *X* ni mogel vedeti, da *p*. Katere razloge lahko ponudimo v podporo našemu stališču? Če smo zagotovili, da ima *X* normalne zmožnosti sklepanja, da je *p* res resnična itn., potem smo pogosto vrnjeni nazaj k dokazovanju, da *X* ni mogel priti v last ustreznih dokazov ali razlogov: ta *X*-ov štiridimenzionalni prostorskočasovni črv ni v nujnem (vzročnem) stiku z osnovami resnice propozicije, da bi X imel ustrezne dokaze v podporo svojemu sklepanju (če je bilo to sklepanje ustrezno). Propozicija *p* postavlja omejitve za

[7] Če je mogoče, potem bi se rad izognil zavzemanju vsakršnega stališča glede snopa vprašanj v filozofiji duha ali psihologiji, ki zadeva naravo psiholoških stanj. Vsako stališče, po katerem se lahko Hermione nauči, da je mačka na preprogi tako, da gleda pravo mačko na pravi preprogi, bo delovalo za moje cilje. Če gledanje mačke na preprogi postavlja Hermione v neko stanje in si želiš to stanje imenovati fizično ali psihološko ali celo fiziološko stanje, potem ne bom ugovarjal vse dotlej, dokler se razume, da je tako stanje, če je to njeno stanje vedenja, na ustrezen način vzročno povezano s tem, da je bila mačka na preprogi, ko je gledala tja. Če takšnega stanja ni, potem tem slabše za moje stališče.

[8] Naj navedem samo nekatere: Gilbert H. Harman, *Thought* (Princeton, N. J.: University Press, 1973); Alvin I. Goldman, »A Casual Theory of Knowing«, v tej reviji, LXIV, 12 (22. junij, 1967): 357–372; Brian Skyrms, »The Explication of 'X knows that p'«, prav tam, 373–389.

to, kakšen bi svet lahko bil. Naše vedenje o svetu, skupaj z našim razumevanjem omejitev, ki so bile postavljene s p-jem, glede na resničnostne pogoje p-ja, nam bo pogosto povedalo, da si dani posameznik ni mogel prilastiti zadostnega dokaza, da bi prišel do vedenja, da *p,* tako pa bi zanikali njegovo zahtevo do vedenja.

Kot razlaga o našem vedenju glede srednje velikih objektov gre to za zdaj v pravo smer. To bo, vzročno, vključevalo neko neposredno referenco na znana dejstva, in, preko tega, referenco na te objekte same. Poleg tega takšno vedenje (o hišah, drevesih, gomoljikah, psih in škatlah za kruh) predstavlja jasen in najlažji primer za obravnavo.

Druge primere vedenja je mogoče razložiti kot utemeljene na sklepanjih, ki temeljijo na primerih, kot so ti, čeprav morajo očitno obstajati medsebojne odvisnosti. To vključuje naše vedenje o splošnih zakonih in teorijah in preko teh naše vedenje o prihodnosti in o veliko preteklosti. Ta razlaga strogo sledi smerem, ki so jih predlagali empiriki, vendar z bistveno spremembo, vpeljano z zgoraj omenjenim eksplicitnim vzročnim pogojem – ki pa ga moderne razlage pogosto izpuščajo, predvsem zaradi poskusov, da se prikaže natančna razlika med »odkritjem« in »upravičenjem«.

Skratka, v povezavi z našim drugim vedenjem uporabljamo *p,* da določimo območje možnega ustreznega dokazila. Uporabljamo, kar vemo o X-u (domnevnem poznavalcu), da določimo, ali so tam lahko obstajale ustrezne vrste interakcije, ali je X-ovo sedanje verjetje, da *p,* vzročno povezano na ustrezni način s tem, kar drži, ker je *p* resnična – ali je njegovo dokazilo izpeljano iz območja, ki je določeno s *p.* Če ni, potem *X* ni mogel vedeti, da *p.* Povezava med tem, kar mora biti v primera, če je *p* resnična, in vzrokih Asovega verjetja, se lahko na široko spreminja.

Ampak vedno obstaja *neka* povezava, ta povezava pa povezuje osnove Asovega verjetja z predmetom p-ja.

Možno je vzpostaviti ustrezno vrsto povezave med resničnostnimi pogoji p-ja (kot so podani z ustrezno definicijo resnice za jezik, v katerem je *p* izražena) in osnovami, na katerih je za *p* rečeno, da je znana, vsaj pri propozicijah, ki se jih *moramo naučiti* – ki niso prirojene. Če tega ni, ni vzpostavljene nobene povezave med *temi osnovami* in *verjetjem, da je propozicija resnična.* To, da imamo takšne osnove, se ne prilega razlagi *vedenja, da p.* Povezava med *p* in upravičenjem verjetja v p ne more biti narejena *na teh osnovah.* Ampak za to vedenje, ki ga pravilno štejemo za neko vrsto upravičenega resničnega prepričanja, *mora* potem obstajati ta povezava. (Seveda ne rabi biti *vse* vedenje upravičeno resnično verjetje za to, da bi naš pomislek držal.)

Nikakršno presenečenje ne bo, da je to preambula k opozorilu, da združevanje *tega* stališča o *vedenju* s »standardnim« stališčem o matematični resnici, otežuje

videti, kako je možno matematično vedenje. Če so, na primer, števila tiste vrste bitnosti, za katere jih po navadi štejemo, da so, potem povezave med resničnostnimi pogoji za izjave iz teorije števil in vsakršnimi ustreznimi dogodki, povezanimi z ljudmi, za katere se domneva, da imajo matematično vedenje, ni mogoče vzpostaviti.[9] Nemogoče bo razložiti, kako nekdo pozna kakršnokoli ustrezno propozicijo teorije števil. Ta drugi pogoj za razlago matematične resnice ne bo zadovoljen, ker nimamo nobene razlage o tem, kako vemo, da držijo resničnostni pogoji za matematične propozicije. Očiten odgovor – da so nekatere od teh propozicij resnične, če in samo če so izpeljive iz nekaterih aksiomov v skladu z določenimi pravili – nam tukaj ne bo pomagal. Kajti zagotovo lahko potrdimo, da so *ti* pogoji doseženi. Toda v takem primeru je to, kar nam manjka, povezava med resnico in dokazom, ko je resnica neposredno definirana na standarden način. Skratka, čeprav je lahko resničnostni pogoj določenih propozicij iz teorije števil, da so izpeljive iz določenih aksiomov v skladu z nekaterimi pravili, to, *da* je to resničnostni pogoj, mora tudi izhajati iz razlage *resnice,* če naj pogoj, na katerega se nanašamo, pomaga povezati resnico in vedenje, če matematične resnice spoznamo ravno s pomočjo njihovih dokazov.

Če imamo neko razlago aritmetike iz teorije množic, je mogoče kajpada natanko določiti tako sintakso kot semantiko *aritmetike* tako, da na videz izpolnjuje pogoje, ki smo jih postavili. Ampak očitno je, da ta postopek pelje v regres, ker bomo potem morali zastaviti ista vprašanja o teoriji množic, v okviru katere ležijo ti odgovori.

V. Dva primera

Obstaja veliko razlag matematične resnice in matematičnega vedenja. Teze, ki sem jih zagovarjal, so mišljene, da se nanašajo na vse. Namesto da bi poskušal biti izčrpen, bom teh zadnjih nekaj strani posvetil raziskavi dveh reprezentativnih primerov: enemu »standardnemu« stališču in enemu »kombinatornemu« stališču. Najprej standardna razlaga, kot jo je izrazil eden od njenih najbolj eksplicitnih in lucidnih zagovornikov, Kurt Gödel.

Gödel se popolnoma zaveda, da mora biti po realistovi (tj. standardni) razlagi matematične resnice naša razlaga o tem, kako poznamo osnovne postulate, ustrezno povezana s tem, kako interpretiramo nanašajoči se aparat te teorije. In tako v svoji razpravi o tem, kako lahko rešimo problem kontinuuma, ko je bilo enkrat pokazano, da ni odločljiv s sprejetimi aksiomi, Gödel slika naslednjo podobo:

> »[O]bjekti transfinitne teorije množic … očitno ne sodijo v fizični svet in celo njihova posredna povezava s fizičnim izkustvom je zelo ohlapna …

[9] Za izražanje zdravega skepticizma glede na te in sorodne poudarke glej Marka Steinerja »Platonism and Casual Theory of Knowledge«, v Journal of Philosophy, LXX, 3 (8. februar, 1973): 57–66.

> Ampak, kljub njihovi oddaljenosti od čutnega izkustva, dejansko imamo tudi zaznavanje predmetov teorije množic, kot je razvidno iz dejstva, da se nam aksiomi vsiljujejo kot resnični. Ne vidim nobenega razloga, zakaj bi morali imeti manj zaupanja v to vrsto zaznavanja, tj. v matematično intuicijo kot v čutno zaznavanje, ki nas spodbuja, da zgradimo fizikalne teorije in pričakujemo, da se bodo prihodnje čutne zaznave skladale z njimi in, še več, verjamemo, da ima vprašanje, ki zdaj ni odločljivo, pomen in bo o njem mogoče odločiti v prihodnosti.«[10]

Ta slika se mi zdi obenem spodbujajoča in zaskrbljujoča. Kar me skrbi, je, da je brez razlage tega, *kako* se nam aksiomi »vsiljujejo kot resnični«, analogija s čutnim zaznavanjem in fizikalno znanostjo brez veliko vsebine. To, kar manjka, je *natanko* tisto, kar zahteva moje drugo načelo: razlaga povezave med našimi kognitivnimi zmožnostmi in znanimi objekti. V fizikalni znanosti imamo vsaj začetek take razlage, ta pa je vzročna. Kot vedenje sprejemamo samo tista verjetja, ki jih lahko ustrezno povežemo z našimi kognitivnimi zmožnostmi. Naše pojmovanje vedenja gre, popolnoma primerno, z roko v roki z našim pojmovanjem nas samih kot spoznavalcih. Gotovo, obstaja *površna* analogija. Kajti, kot poudarja Gödel, aksiome »preverjamo« z izpeljavo posledic iz njih na tistih področjih, za katera se nam zdi, da imamo bolj neposredno »zaznavanje« (jasnejše intuicije). Vendar nam nikoli ni povedano, kako poznamo celo te, jasnejše, propozicije. Na primer, »dokazljive« posledice aksiomov o višji neskončnosti so (sicer neodločljive) propozicije iz teorije števil, ki same lahko »preverimo« z računanjem do kateregakoli celega števila. Toda ta zgodba, da bi nam bila kjerkoli v pomoč, nam mora povedati, kako poznamo izjave aritmetičnega računa – *če pomenijo to, kar naj bi pomenile* v *skladu z njihovo standardno razlago. Tega* pa nam niso povedali. Analogija je torej v najboljšem primeru površna.

Toliko o zaskrbljujočih vidikih. Morda bolj pomembno in tisto, kar se mi zdi spodbujajoče, je očitno osnovno soglasje, ki motivira Gödelov poskus potegniti vzporednico med matematiko in empirično znanostjo. Mislim, da Gödel vidi, da mora biti nekaj povedano za premoščanje prepada, ki je ustvarjen z njegovo realistično in platonistično interpretacijo matematičnih propozicij, med bitnostmi, ki so predmet matematike, in človeškim spoznavalcem. Namesto krpanja logične oblike matematičnih propozicij ali narave znanih objektov, Gödel postulira posebno sposobnost, s katero smo »v vzajemnem delovanju« s temi objekti. Zdi se, da se strinjamo glede analize tega temeljnega problema, ampak očitno se ne strinjamo o epistemološkem vprašanju – katere poti so za nas odprte, s pomočjo katerih bomo lahko spoznali stvari.

Če je naša razlaga empiričnega vedenja sprejemljiva, mora to biti delno zato, ker poskuša narediti povezavo razvidno v primeru našega teoretičnega vedenja, kjer

[10] »What Is Cantor's Continuum Problem?«, popravljena različica v Benacerraf in Putnam, nav. delo, str. 271.

ni *prima facie* jasno, kako izpolniti vzročno razlago. Tako, ko pridemo do matematike, odsotnost skladne razlage tega, kako je naša matematična intuicija povezana z resnico matematičnih propozicij, naredi celotno razlago nezadostno.

Da bi vpeljali neko špekulativno zgodovinsko opombo, z nekaj podlage v besedilih, morda ne bo nerazumno predpostaviti, da se je Platon skliceval na pojem *anamneze*, vsaj delno zato, da bi razložil, kako je, glede na naravo idej, kot jih on naslika, za nas sploh mogoče, da jih (s)poznamo.[11]

»Kombinatorno« stališče o matematični resnici ima epistemološke korenine. Začne se s trditvijo, da je, karkoli je lahko matematični »objekt«, naše vedenje pridobljeno iz dokazov. Dokazi so ali so lahko (za nekatere morajo biti) zapisani ali govorjeni; matematiki jih lahko pregledajo in pridejo do soglasja, da *so* dokazi. Matematično vedenje se v veliki meri pridobi in prenaša preko teh dokazov. Skratka, ta vidik matematičnega vedenja – njegova (predvsem jezikovna) sredstva ustvarjanja in prenosa, dajejo svojo zagon razredu stališč, ki sem jih imenoval »kombinatorna«.

Ker opaža vlogo dokazov pri ustvarjanju vedenja, ta vidik išče osnove resnice v samih dokazih. Kombinatorna stališča prejemajo dodatno spodbudo iz spoznanja, da platonist meče plašč skrivnosti preko tega, kako je sploh mogoče pridobiti vedenje. Dodajte to ugotovitev k verjetju, da je matematika otrok nas samih (matematično odkritje je, po teh stališčih, redko odkritje o neodvisni realnosti), in ne bo presenetljivo, da iščemo dejanje spočetja, da bi razložili rojstvo. Veliko razlag matematične resnice sodi pod to rubriko. Morda skoraj vsa. Več sem jih mimogrede omenil in na kratko razpravljal o Hilbertovem stališču v »On the Infinite«. Zadnji primer, ki ga želim preučiti, je primer konvencionalističnih razlag – snopu stališč, da so resnice logike in matematike resnične (ali so lahko narejene za *resnične)* zaradi eksplicitnih konvencij, kjer so konvencije, za katere gre, običajno postulati določene teorije. Še enkrat jim bom verjetno vsem storil krivico, ko bom v isti koš zmetal številna stališča, katerih zagovorniki bi jih gotovo želeli obdržati narazen.

Quine je v svojem klasičnem spisu o tej temi[12] jasno, prepričljivo, in odločno opravil s stališčem, da so resnice *logike* razložene kot stvaritve konvencije – veliko bolje, kot bi jaz lahko upal, da bom to storil tukaj. Pokazal je, da mora zato, ker moramo razložiti neskončno mnogo resnic, biti označevanje zaželenih stavkov kot resnic splošno, ne pa po kosih. Toda splošno označevanje lahko poteka le preko splošnih načel – in, če smo predpostavili, da ne razumemo sploh nobene logike, ne moremo izpeljati posameznih primerov iz splošnih načel: za takšno nalogo bi potrebovali logiko.

Ne glede na morebitno prepričljivost tega, želim dodati še en argument – ne zato,

[11] »Ker je torej duša nesmrtna in se je večkrat rodila ter videla, kar je tukaj in v Hadu in (sploh) vse stvari, ne ostaja nič, o čemer se ni poučila.« (Platon, *Menon*, 81)

[12] W.V. Quine, »Truth by Convention«, ponatis v Benacerraf in Putnam, nav. delo.

ker mislim, da ta mrtev konj rabi nadaljnje šibanje, temveč tako zato, ker je Quineov argument omejen na primer logike, kot zato, ker glavne poante, ki jih želim pokazati, ne izhajajo v zadostni meri iz tega. Dejansko, Quine konvencionalistu dopušča nekatera načela, ki mu jih jaz želim odreči. Ko Quine opira svoj primer proti konvencionalizmu na potrebi po splošnem označevanju neskončno mnogo resnic, priznava, da če bi obstajalo le končno mnogo resnic na razpolago, na katere bi bilo treba računati, bi konvencionalist morda imel možnost dokazati svojo zadevo. On pravi:

> »Če so lahko bili pripisi resničnosti narejeni eden za drugim, a ne za neskončno število v enem času, potem bi zgornja težava izginila; logične resnice … bi bile preprosto zatrjene ena za drugo z ukazom in se problem njihovega povzemanja iz bolj splošnih konvencij sploh ne bi pojavil.« (str. 344)

Če bi torej lahko našli nek način, da bi logični stavki nosili svoje resničnostne vrednosti vpisane na čelu, bi izginili ugovori konvencionalistični razlagi resnice – saj bi imeli določene resničnostne vrednosti za vse stavke, kar je vse, kar je mogoče zahtevati.

Sprašujem se, kajpada, kaj bi takšno razprševanje besede »resnično« doseglo. Zagotovo ne more zadostovati za to, da bi določili pojem resnice, da bi ta pripisala resničnostne vrednosti vsakemu stavku jezika in vsem stavkom skupaj [zdaj predpostavite, da je jezik teorija množic v neki formalizaciji prvega reda] (naj bodo tisti s sodim številom podkev (d) »resnični«).

Kaj bi naredilo tak pripis predikata »resničen« za določitev *pojma resnice?* Preprosto uporaba te trozložne besede? Tarski je predlagal, da je zadovoljitev konvencije R nujni in zadostni pogoj za definiranje resnice za posamezen jezik.[13] Zgolj (rekurzivna) razdelitev resničnostne vrednosti se lahko preoblikuje v teorijo resnice, ki zadovolji konvencijo R. Lahko smo od tega odvisni pod pogojem, da smo se pripravljeni izogniti tistemu, za kar mislimo, da je glavno vprašanje in prezreti pojem prevoda, ki se pojavlja v formulaciji konvencije R. Kar bi se pogrešalo, kot je že težko povedati, je teoretski aparat, ki ga je Tarski uporabil pri zagotavljanju definicij resnice, to je pri analizi resnice v okviru »referenčnih« pojmov imenovanja, predikacije, zadovoljitve in kvantifikacije. Definicija, ki se ne ravna po običajnih rekurzivnih stavkih za običajne slovnične oblike, lahko ni ustrezna, čeprav zadovoljuje konvencijo R. Razlaga se mora

[13] Alfred Tarski, »The Concept of Truth for Formalized Languages«, ponatis v Tarskijevi knjigi *Logic, Semantic, and Metamathematics* (New York: Oxford, 1956). Konvencija T je navedena na str. 187–188, kot sledi:

»KONVENCIJA T. Formalno pravilna definicija simbola 'Rs', oblikovanega v metajeziku, se bo imenovala *ustrezna definicija o resnici*, če ima naslednje posledice:

(α) vse stavke, pridobljene iz izraza '$x \in Rs$, če in samo če p' z nadomeščanjem simbola 'x' s strukturno-opisnim imenom vsake izjave zadevnega jezika in simbola 'p' z izrazom, ki tvori prevod tega stavka v metajezik;

(β) stavek 'za vsak x, če je $x \in Rs$, potem je $x \in S$' (z drugimi besedami '$Rs \subseteq S$').«

ravnati po referenci in zadovoljitvi ter se jo mora dopolnit z razlago same reference. Vendar je obramba te zadnje trditve preveč zapletena zadeva, da bi se je tu lotili.[14]

Quine je v »Truth by Convention« menil, da določitev resničnostne vrednosti v vseh kontekstih, ki vsebujejo neko besedo, zadostuje za določitev njene reference, To bi *lahko* bilo tako, če bi že imeli pojem resnice in bi zasledovali referenco izraza, ki nas zanima, po poti definicije resnice. Vendar se zdi, da je nekaj očitno narobe, ko poskušamo določiti pojem *same* resnice na ta način. Ko počnemo tako, odvržemo samo oporo, ki omogoča, da ta postopek deluje za druge pojme. Resnica in reference hodita z roko v roki. Naš pojem resnice, kolikor ga sploh imame se ravna po posredovanju pojmov, ki jih je Tarski uporabil, da bi definiral pojem resnice za razred jezikov, ki jih je preučeval – bistvo Tarskijevega prispevka gre mnogo dlje kot konvencija R, vendar vključuje tudi shemo za dejansko definicije analiza resnice za jezik, ki ne bi potekala skozi znana sredstva predikacije, kvantifikacije itn., nam ne bi mogla dati zadovoljitve.

Če smo vsaj približno na pravi poti, potem mora biti jasno, zakaj so, po mojem mnenju, »kombinatorna« stališča o naravi matematičnih resnic neuspešna. Izogibajo se temu, kar se mi zdi nujna pot do razlage resnice: skozi predmet propozicij. katerih resnico se definira. Motivirana z epistemološkimi premisleki dohitijo resničnostne pogoje, katerih zadovoljitev ali nezadovoljitev lahko ugotovijo navadni smrtniki; toda cena, ki jo plačajo, je, da niso zmožni povezati teh tako imenovanih »resničnostnih pogojev« z resnico propozicij, katerih so pogoji so.

Tudi če se dopusti, da resnice logike prvega reda ne izvirajo iz konvencij, je mogoče še vedno trditi, da je preostala matematika (teorija množic za logiciste; teorija množic, teorija števil in druge stvari za nelogiciste) sestavljena iz konvencij, ki so formalizirane v logiki prvega reda. Tudi to stališče je predmet ugovora, da tak pojem konvencije ne rabi prinašati s sabo *resnice.*[15] Vsekakor je jasno, da je ne. Kajti celo če se zanemari bolj splošne ugovore, ko je logika enkrat določena, postaja možno, da se tako dogovorjene konvencije izkažejo za protislovne. Zato ni mogoče trditi, da določitev konvencij *jamči* resnico. Toda če ne *jamči* resnice, kaj potem razlikuje tiste primere, v katerih jo prinese, od tistih, v katerih je ne? Neprotislovnost ne more biti odgovor. Navajati jo kot tako pomeni *napačno* razumeti pomen dejstva, da je protislovnost *dokaz,* da resnica ni bila dosežena. Temeljitejši razlog je ponovno, da postulacijska stipulacija ne naredi nobene povezave med propozicijami in njihovo temo – stipulacija ne zagotavlja resnice. V najboljšem primeru omejuje razred definicij (interpretacij) resnice, skladnih s stipulacijami. Ampak to ni dovolj.

[14] Za odličen prikaz podobnega stališča glej Hartry Field, »Tarski's Theory of Truth«, v tej reviji, LXIX, 13 (13. julij, 1972): 347–375.

[15] Identični argumenti bodo veljali za stališče, ki se ga morda ne da razločiti od tega, da postulati tvorijo *implicitne definicije* obstoječih pojmov (nasprotno z dogovorom, kako je treba razumeti nove), če je to ponujeno kot razlaga, kako vemo, da so aksiomi resnični (jezika smo se naučili z učenjem *teh* postulatov).

Za razjasnitev te poante, si poglejmo Russellov pogosto navedeno reklo: »Metoda postuliranja' tega, kaj si želimo, ima veliko prednosti; te so enake kot prednosti kraje pred častnim garanjem.«[16] Po stališču, ki ga predlagam, presojam, da je to zmotno. Kajti s krajo vsaj odideš s plenom, medtem ko so implicitna definicija, konvencionalno postuliranje in njuno sorodstvo nezmožni prinašati resnico. Niso samo moralno, ampak tudi praktično pomanjkljivi.

[16] Bertrand Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy* (London: Allen & Unwin, 1919), str 71.