**ANαliZA**

časopis za kritično misel

Letnik 16, številka 3, december 2012 · ISSN 1408-2969

INTUICIJE V MATEMATIKI

Philip Kitcher

# Matematična intuicija

*prevedla Iris Merkač*

**Citiranje:** Philip Kitcher, »Matematična intuicija«, *Analiza: časopis za kritično misel* 16, št. 3 (2012): 77–91.

Prevod. Licenca Creative Commons, ki velja za arhiv revije, za prevode ne velja; pravice izvirnika pripadajo njegovim imetnikom.

Izdajatelj: Društvo za analitično filozofijo in filozofijo znanosti, Ljubljana.

*Elektronska različica je bila leta 2026 rekonstruirana iz skena tiskane izdaje (OCR, ročno pregledano) in preverjena s tiskano izdajo. Številke strani ustrezajo tiskani izdaji; prelomi strani znotraj prispevka se lahko nekoliko razlikujejo.*

Philip Kitcher
*Prevedla Iris Merkač*

# MATEMATIČNA INTUICIJA*

I

»Intuicija« je eden izmed najbolj obdelanih izrazov v filozofiji matematike. Fregejevo ostro opombo se pogosto spregleduje: »Vse prelahko se sklicujemo na notranjo intuicijo, če ne moremo navesti nobenega drugega razloga vednosti«.[1] v tem poglavju bom preiskoval, ali lahko izdelam matematični apriorizem bodisi na realističen ali konstruktivističen način s predpostavljanjem, da obstaja nek poseben proces, ki lahko da osnovno apriorno matematično vednost. Naše raziskovanje bo težko prekinilo s tradicijo, če bomo označevali te domnevne procese kot »intuicije«.

Mojo preiskavo aprioristovih stališč bom začel s premislekom konstruktivistične različice apriorizma. Prednost tega izhodišča je, da obstaja sorazmerno jasen pristop do epistemoloških vprašanj, namreč Kantova teorija čiste intuicije[§] (zora). S premislekom te teorije ne bomo zgolj zmožni zaznati težav, s katerimi se sooča konstruktivistični apriorizem, ampak bomo tudi prišli do nekaj splošnih poant, ki jih je mogoče uporabiti proti nejasnim predlogom realistov.[2] }[...] Naj povzamem. Kant predlaga, da konstruiramo like v mislih, jih pregledamo z očesom uma, in tako pridemo do apriornega spoznanja aksiomov, iz katerih se začnejo naši dokazi. Teorija je najbolj jasna pri pojasnjevanju našega geometrijskega spoznanja in je le težko presenetljivo, da se je Kant zatekel geometriji, ko je moral podati kakšen primer. Kakorkoli, četudi opustimo vprašanja o tem, kako naj bi Kant priskrbel pojasnilo o osnovnem apriornem matematičnem spoznanju na področjih, ki so drugačna od geometrije, obstajajo nekatere značilnosti njegovega predloga, ki so *prima facie* begajoče. Težko je razumeti, kako nam bi lahko proces gledanja miselnih risank dal spoznanje, razen če bi bilo to spoznanje precej nezanimivo in bi se ukvarjalo le s posebnimi liki pred nami. Hilbert in intuicionisti, ki sledijo Kantu pri

* Prevedeno po Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford University Press, str. 49–64.

[1] *The Foundations of Arithmetic,* str. 19.

§ V angl. in franc. je beseda »intuition« standardni prevod Kantovega »Anschauung«, ki ga v slov. tradicionalno prevajamo kot »zor«. (Vir uporabe intuicije je v Kantovi »Logiki«, v kateri Kant sam predlaga lat. besedo »intuitio« kot prevod za »Anschauung« (Kant, 1800, str. 536). Mi bomo v oklepaju pisali »zor«, kot opozorilo. – Op. prev.

[2] Naslednja razprava povzema in razširja gradivo, ki je predstavljeno v mojem članku »Kant and the Foundations of Mathematics«.

zatrjevanju, da osnovna oblika matematičnega spoznanja sestoji iz dojemanja lastnosti miselno predstavljenih bitnosti, ne morejo pojasniti, kako je matematika kaj več kot le zbirka trivialnih resnic, ki se ukvarja samo z lastnostmi teh miselnih bitnosti, katere so matematiki po naključju zaznali, ali s tistimi miselnimi konstrukcijami, ki so jih naključno izvedli.[3] Zdi se nam, da se tukaj soočamo z dilemo. Če matematične izjave niso samo poročila o značilnostih začasnih in privatnih miselnih bitnosti, potem ni jasno, kako čista intuicija (proces, v katerem preiskujemo te bitnosti in odčitamo njihove lastnosti) ustvarja matematično spoznanje. Če, po drugi strani, matematične izjave zgolj opisujejo začasne in privatne miselne bitnosti, potem take izjave izražajo drugačne propozicije za različne ljudi in izražajo drugačne propozicije ob različnem času. Na matematična izjave se ne več gleda, kot da bi imele stalno intersubjektivno vsebino. Nadalje je popolnoma nepojasnljivo, zakaj bi bile te izjave tako pomembne v naših izmenjavah s fizičnim svetom. Zdi se, da nam bo bodisi spodletelo pojasniti matematično spoznanje bodisi bomo prišli do sklepa, da je takšno spoznanje trivialno.

Kant razvija bistroumen odgovor na to dilemo. Zanika, da je funkcija čiste intuicije (zora) zgolj to, da nas vodi k spoznanju lastnosti posameznih likov. S konstruiranjem likov v čisti intuiciji (zora) smo predpostavili, da se začnemo zavedati načel, ki nujno karakterizirajo vse naše izkustvo. Šteje se, da naš duh vsiljuje strukturo izkustvu. Konstrukcija matematičnih bitnosti poudarja to strukturo, tako da s preiskovanjem naših miselnih konstrukcij odkrivamo značilnosti, ki karakterizirajo možno izkustvo.

Četudi je Kantov lastni predlog povezan s čutnim pojmom čiste intuicije (zora) – rišemo miselne slike in jih gledamo – ga je sorazmerno enostavno posplošiti. Jedro teorije je sestavljeno iz dveh trditev: matematične resnice so resnične zaradi strukture, ki jo naša psihološka zgradba predpisuje celotnemu izkustvu; z dojemanjem značilnosti miselno predstavljenih matematičnih bitnosti lahko sebi razkrijemo strukturne lastnosti duha, zaradi katerih je matematika resnična, in s takim početjem lahko pridemo do apriornega matematičnega spoznanja. Kakorkoli že izberemo, da bi artikulirali ti temeljni trditvi, smo potencialno ranljivi za tri vrste težav. Prva je *težava irelevantnosti*: kako razlikujemo med temi lastnostmi predstavljenih bitnosti, ki zrcalijo strukturo duha, in onimi, ki so naključne? Druga je *težava praktične nemožnosti:* kako določimo, da so zaporedja predstav, ki jih *praktično* ne moremo doseči, *načeloma* možna za nas? Nazadnje obstaja še *težava natančnosti:* kako se lahko upremo izzivu, da predstavljene bitnosti nimajo *natančno* teh lastnosti, za katere menimo, da jih imajo?

Za ponazoritev teh težav bom na kratko premislil, kako nastanejo glede na Kantov izvirni predlog. Kant verjame, da lahko pridobimo apriorno spoznanje o splošnih lastnostih trikotnikov ob risanju in preiskovanju posameznega trikotnika. Ampak kako prihajamo do posploševanja pravih lastnosti in se izogibamo posploševanju napačnih? Kako imam, na primer, pri preiskovanju

[3] Heyting prihaja zelo blizu priznavanja tega. Glej njegovo knjigo *Intuitionism: An Introduction*, str. 3. Za težavo, ki izvira od Hilberta, glej moj prispevek »Hilbert's Epistemology«.

raznostraničnega trikotnika pravico sklepati, da je vsota dolžin dveh stranic trikotnika večja od dolžine tretje stranice, ne pa da so vsi trikotniki raznostranični? Če bi Kant predlagal, da bi morali posplošiti le te lastnosti, ki so določene s *pojmom* trikotnika, potem bi bil proces konstruiranja miselnih slik preprosto sredstvo za odkrivanje pojmovnih povezav, Kantovo stališče pa bi postalo konceptualistična različica apriorizma.[4] Tako mora Kant sklepati, da ima predstavljen trikotnik tri tipe lastnosti: tiste lastnosti, ki so določene s pojmom trikotnika; tiste lastnosti, ki zrcalijo strukturo, ki jo nujno predpisujemo izkustvu; in tiste lastnosti, ki logično sledijo iz naključnih odločitev, narejenih v konstrukciji. Da bi bilo njegovo pojasnilo uspešno, potrebujemo postopek za razlikovanje lastnosti zadnjih dveh tipov, tako da lahko legitimno posplošimo prvega in se izognemo posploševanju drugih dveh tipov. Toda biti zmožen to početi pomeni natanko imeti tisto spoznanje o strukturi izkustva, ki ga Kant skuša pojasniti!

Težava praktične nemožnosti nastaja na podoben način.[5] Kant trdi, da lahko čista intuicija (zor) prinese spoznanje, da so deli črte neskončno deljivi. Zdaj je jasno, da ne moremo doseči tega spoznanja z opazovanjem dela črte, ki je neskončno deljiv. Torej, na kar mora Kant meriti, je, da si damo zaporedje predstav, ki prikazujejo nenehni proces delitve. Ker obstajajo praktične omejitve naše sposobnosti, da to počnemo, se bomo soočili z nerodnim vprašanjem: ali so te omejitve odsev strukturne lastnosti izkustva? Za rešitev tega vprašanja ponovno potrebujemo ta isti vpogled v strukturo izkustva, ki naj bi ga preskrbela čista intuicija (zor).[6]

Težava natančnosti je še bolj očitna. Tako kot so naše sposobnosti običajne zaznave omejene in zmotljive, so tudi naše sposobnosti miselne zaznave. Zaradi tega ne moremo domnevati, da nam bo miselna zaznava podala natančno spoznanje celo značilnosti posameznih likov, ki jih konstruiramo. Dopustiti moramo, da morda nismo zmožni ločiti ravne črte (premice) od tiste, ki je zelo rahlo ukrivljena. Dopustitev je nevarna, kajti predstavljajte si, da sledimo Kantoven postopku, da bi prišli do prepričanja v neko geometrijsko resnico. Jamstver moč tega postopka lahko spodkopljejo izkustva, ki vključujejo zmotno merjenje, za katero se zdi, da kaže, da je izjava zgolj tesen približek resnice. Glede na takšna izkustva bi bilo za nas racionalno predpostavljati, da naša (miselna) vizualna ostrina ni bila zadostna in da je tako preprečila oblikovanje prepričanja. Potemtakem proces, ki ga Kant opisuje, ne izpolnjuje pogoja (3b) glede apriornih jamstev.

Lahko bi si mislili, da se te težave za Kantovo teorijo pojavijo preprosto zato, ker je njegovo razumevanje procesa zora preveč grobo. Morda miselno slikanje preprosto ni primeren način pridobivanja matematičnega spoznanja. Vendar bi morali upoštevati, da ima Kantovo identificiranje procesa zora prednost v tem,

[4] Intuicionisti se včasih obrnejo v to smer. Glej Heytinga, *Intuitionism: An Introduction*, str. 13–14 in A. Troelstra, *Principles of Intuitionism*, str. 12.

[5] Ta primer izvira iz poučnega spisa Charlesa Parsonsa »Infinity and Kant's Conception of the 'Possibility of Experience'«.

[6] Za intuicioniste in za Hilberta se ta težava pojavlja v zvezi z načelom matematične indukcije.

da izbere proces, ki dejansko igra prepoznavno vlogo v našem miselnem življenju. Nadalje, o takih procesih vemo dovolj, da ocenimo njihove poverilnice kot apriornih jamstev. Če nekdo predlaga, da je intuicija ločena od čutnega, potem imamo pravico vprašati po opisu tega procesa intuicije, ki nam jo bo identificiral in določil, ali lahko rabi kot apriorno jamstvo za matematična prepričanja. Brez opisa te vrste ni jasno, da predlog sploh vodi k teoriji matematičnega spoznanja, še manj k teoriji apriornega matematičnega spoznanja.

V vsakem primeru takšna zameglitev pojma intuicije ne bi nujno rešila težav, ki ogrožajo Kantovo teorijo. Najprej preučimo težavo irelevantnosti. Ta nastaja, ker se Kantov postopek za izogibanje trivializaciji matematike opira na tezo, da imajo liki, konstruirani v čisti intuiciji (zoru), tri tipe lastnosti: tiste, ki so določene z uporabljenimi pojmi v konstrukciji; tiste, ki zrcalijo strukturo, ki jo razum predpisuje izkustvu; in tiste, ki so naključne. Naša težava je razlikovati drugi tip lastnosti od tretjega, saj se zdi, da smo ju zmožni razlikovati le, če imamo nek neodvisni dostop do značilnosti, ki jih predpisuje naš duh. Z zanikanjem, da je intuicija čutna, se ne izognemo tej težavi. Ta težava nas bo mučila, dokler imajo intuitivno (zorno) spoznani objekti tri tipe lastnosti. Lahko bi poskušali odgovoriti z zanikanjem, da imajo ti objekti kakršnekoli naključne lastnosti, vendar to ne deluje. Prvič, objekti ki jih intuitivno spoznavamo bodo imeli (vsaj) naključne lastnosti, da jih mi intuitivno spoznavamo v določenih časih, ne pa v drugih. Drugič pa, kar je bistveno, je naša sposobnost *prepoznavanja*, da posamezna lastnost ni naključna. Tudi če intuitivno spoznani objekti niso imeli naključnih lastnosti, bi to morali vedeti, in težko je videti, kako nam je lahko intuicija pomagala do tega spoznanja ali kako je lahko razveljavila nasprotne predloge nekooperativnega izkustva.

Podobno, ne moremo rešiti težave praktične nemožnosti samo z zanikanjem, da je intuicija (zor) čutni proces. Težava ohranja svojo želo tako dolgo, dokler trdimo, da je naše spoznanje nekaterih matematičnih načel odvisno od našega prepoznavanja možnosti zaporedja intuicij, ki jih v praksi ne moremo dati samim sebi. Naj bo intuicija čutna ali ne, se zdi, da kratkost človeškega obstoja postavi končno zgornjo mejo glede števila intuicij, ki si jih lahko damo samim sebi. Da bi zagovarjali proces intuicije (zrenja) kot vir vsakega apriornega matematičnega spoznanja, bomo prisiljeni dokazovati, da ni matematičnih aksiomov, ki jih je mogoče poznati samo apriorno, tako da samim sebi dajemo neomejeno dolgo zaporedje intuicij. Zdi se, da se lahko konstruktivistični apriorizem izogne tej težavi le s sprejemanjem finitizma.

Ta razdelek smo začeli s postavljanjem dileme za konstruktivista: bodisi je matematika trivialna bodisi obstaja očitna težava pri pojasnjevanju, kako pojmovanje miselnih konstrukcij prinaša matematično spoznanje. Kantov spretni poskus rešitve te dileme vključuje idejo neskladnosti med našimi konstrukcijami in osnovno matematično realnostjo, ki jo predstavljajo, prisotnost tega neskladja pa povzroča dve težavi, o katerih smo razmišljali, *težavo irelevantnosti* in *težavo praktične nemožnosti*. Četudi osvobodimo pojem intuicije od Kantove interpretacije tega pojma kot čutnega procesa, bodo te

težave ostale, tako da se bo vsak poskus konstruiranja teorije apriornega matematičnega spoznanja vzdolž konstruktivističnih linij bodisi soočal z enako usodo kot je Kantova bodisi pa se bo moral okleniti drugega kraka dileme. Preden preučimo, ali obstaja kakršnakoli tolažba za apriorista v tem zadnjem pristopu, želim preučiti tretjo težavo, ki je vzniknila proti Kantu. Ta težava nas bo vodila k vprašanjem, ki bodo pomembna za kasnejše razprave.

II

Na prvi pogled se zdi, da je težava natančnosti težava, ki bi jo lahko preprečili, če bi opustili Kantovo razumevanje intuicije (zora). Jedro problema je kajpada dejstvo, da naše sposobnosti miselne zaznave niso boljše od naših sposobnosti običajne zaznave: glede na ustrezno trdovratno izkustvo, nam miselna zaznava miselnih konstrukcij ne bi podala več pravice do razveljavitve predlogov izkustva kot zaznava lika na tabli. Proces čiste intuicije ne dosega standardov, ki so potrebni za apriorna jamstva, ne zato, ker je *čuten*, ampak zato, ker je *zgrešljiv*. Ko je to enkrat priznano, lahko vidimo, kako predstaviti bolj splošno različico naše kritike.

Govor o zmotljivosti procesa čiste intuicije je sorazmerno nenatančen. Kar je odločilno v ugovoru proti Kantu, je to, da je za nas razumno verjeti, da bi nas lahko proces čiste intuicije (zrenja) vodil do napačnih prepričanj. Naj uvedem nekaj terminologije. Za tip procesa, ki povzroča prepričanje, bomo tekli, da je *dvomljiv*, če obstaja neko [človeško – op. prev.] življenje, glede na katero bi bilo razumno verjeti, da (v njem) nekateri procesi tega tipa povzročajo napačna prepričanja. Zdaj predpostavimo, da preiskujemo status procesa a kot apriornega jamstva za prepričanje, da *p*. Domneval bom, da a pripada k tipu procesa, *tipu razpoložljivosti a*, ki smo ga identificirali, tako da bi bil proces tega tipa razpoložljiv glede na vsako zadostno izkustvo. Potem štejem, da težava natančnosti naposled izvira iz teze

Če je tip razpoložljivosti α dvomljiv in če obstajajo življenja, ki bi kazala na neresničnost p-ja, potem obstajajo ustrezna življenja, glede na katera razpoložljivi procesi istega tipa kot α ne bi jamčili prepričanja, da *p*.

Osnovna ideja je zelo preprosta. Če lahko imam razloge za zaskrbljenost, ali tip procesa proizvaja napačno prepričanje, potem v nekaterih okoliščinah, v katerih izkustvo kaže, da je prepričanje, ki sem ga oblikoval tako, da sem se podvrgel procesu tega tipa, napačno, jaz ne bi imel jamstva za svoje prepričanje.

Preprosto si moramo predstavljati, da moje življenje sestoji deloma iz izkustev, ki mečejo dvom na zanesljivost tipa procesa, in deloma iz izkustev, ki postavljajo pod vprašaj sklep, ki sem ga oblikoval.[7]

[7] Naj razvijem predpostavko. Predpostavljam, da sta lahko dve vrsti izkustev združeni v eno življenje. Tako si zamišljam nekoga, ki mu je predstavljena tako evidenca proti prepričanju kot evidenca proti univerzalni zanesljivosti tipa procesa. V teh okoliščinah bi bilo za osebo nerazumno, da bi uporabila proces tega tipa, da razveljavi zadostno evidenco. Za naše namene tukaj mislim, da je domneva, da sta lahko dva kljubovalna dela izkustva združena, neškodljiva.

Če lahko za dani proces α doženemo ustrezne primere antecedensov od (5), potem lahko sklepamo, da a ni apriorno jamstvo za prepričanje, da *p*. Saj bo sledilo, da obstajajo (ustrezna) življenja, glede na katera razpoložljivi procesi tipa a ne bodo jamčili prepričanja, da *p* in zato a ne bo izpolnil pogoja (3b) naše analize »apriornega jamstva«. Ravno ta strategija je bila uporabljena pri razvijanju težave natančnosti: uporabil sem podobnost miselne zaznave in običajne zaznave, da sem podprl dvomljivost čiste intuicije, in vzel kot samoumevno, da obstaja možno izkustvo, ki bi lahko kazalo neresničnost geometrijskih aksiomov. Če bi imeli takšno izkustvo in tudi izkustvo, ki bi spravilo v dvom zanesljivost čiste intuicije, ne bi bilo za nas jamstveno oblikovati prepričanja v vprašljive aksiome na osnovi čiste intuicije. Teza (5) zajema to idejo in predstavlja njeno splošno obliko, s čimer kaže na širšo uporabo naše kritike.

Na tem mestu predvidevam dve vrsti kritike. Prva se osredinja na posebno obliko moje uporabe teze (5) proti Kantu. Pravkar sem priznal, da sem vzel za samoumevno, da obstaja možno izkustvo, ki bi lahko kazalo na neresničnost geometrijskih aksiomov. Ali imam pravico do te predpostavke? Zagotovo je ena od prednosti Kantove teorije, da ruši tezo, da obstaja možno izkustvo, ki bi kazalo na neresničnost matematičnih resnic. Kajti Kant ne trdi samo, da *so* matematične resnice nujno resnične, ampak tudi, da se morajo nujno *zdeti* resnične. Prava poanta teze, da matematične resnice opisujejo strukturo, ki jo um predpisuje izkustvu, je zanikati, da nas je lahko izkustvo zavajalo glede matematike. Pravzaprav, Kantu bi lahko verjeli, ko je cenil tako hvaljeno nezamisljivost neresničnosti resničnih matematičnih izjav in da je zagotovil prvotno psihološko razlago za ta pojav.

Ta ugovor je zgrešen. Mi nismo upravičeni do predpostavke, da mora izkustvo, ki kaže na neresničnost matematične resnice, obstajati v neki relativno neposredni predstavitvi položaja, v katerem je bilo zvijačno prikazano, da se zdi, kot da je izjava neresnična. Obstajajo posredni načini, v katerih nam lahko izkustvo predlaga, da je ponovni pregled naših prepričanj upravičen. Da bi to ponazorili, nam bo v pomoč, če se začasno vrnemo h Kantovemu pojasnilu geometrije. Vzemimo izjavo, da je vsota vseh kotov kateregakoli trikotnika enaka 180°, ki jo Kant jemlje kot apriorno. Dovolite mi skicirati (grobo) razliko med tremi vrstami zavajajočih izkustev, ki bi lahko izzvale naše prepričanje v izjavo.[8] }*Neposredni izziv* sestoji iz zaznavnega izkustva lika, ki se zdi, če ga presojamo po naših najboljših merilih, da nasprotuje izjavi. *Teoretski izziv* sestoji iz zaporedja izkustev, ki kažejo, da bo fizika-z-geometrijo, ki ne vsebuje te izjave, ponudila enostavnejši popolni opis pojava kot fizika-z-geometrijo, ki jo vsebuje. *Družbeni izziv* bo zaporedje izkustev, v katerih navidezno zanesljivi strokovnjaki zanikajo izjavo, ponujajo hipoteze o napakah, ki smo jih naredili, ko smo prišli do tega, da smo ji verjeli in tako naprej. (Ta delitev izzivalnih izkustev je koristna, vendar očitno groba: ne mislim predlagati, da je izčrpna ali da so meje kategorij natančne). Zdaj lahko Kantova teza, da naša psihološka

[8] Dopuščam nujnost resnice in zato ne predpostavljam, da lahko pride do *veridičnih* izzivov. Očitno, če tega dopuščanja ne bi bilo, bi bil Kantov primer še šibkejši.

zgradba narekuje geometrijsko strukturo izkustva, izključi možnost neposrednih izzivov, vendar je precej združljiva z obstojem teoretskih ali družbenih izzivov. Torej ni nobenega razloga za zavrnitev predpostavke, na kateri sloni težava natančnosti.

Enako strategijo lahko posplošimo proti tistim, ki verjamejo v bolj splošno kantovsko tezo, da razum predpisuje matematično strukturo možnemu izkustvu. Mi lahko naredimo delitve, ki so podobne tistim, ki smo jih pravkar vpeljali. Če kdo tako poskuša ovirati uporabo teze (5) proti poverilnicam predpostavljenega apriornega jamstva na podlagi trditve, da izkustvo ne bi moglo storiti niti tega, da bi se nam *zdelo,* da so posamezne matematične izjave neresnične, se lahko odzovemo z vztrajanjem, da morajo biti upoštevani ne samo neposredni izzivi, ampak tudi teoretski in družbeni izzivi. V geometrijskem primeru nam zgodovina raziskovanja prostora olajša opis teoretskega izziva; v drugih primerih *je* morda težje predvideti, kako se lahko pojavi teoretski izziv. Vendarle, v najslabšem primeru se lahko vedno zatečemo k možnosti družbenih izzivov. Ni nam treba razmišljati o družbenem izzivu kot izkustvu, v katerem navidezne avtoritete preprosto zavračajo, kar trdimo. Predstavljamo si lahko, da strokovnjaki dokazujejo svoje strokovno znanje z izdelovanjem preverljivih rešitev za težave, ki nas begajo, da izdelujejo verjetne argumente proti našim trditvam (argumente, katerih pomanjkljivosti so predobro skrite za nas, da bi jih odkrili) in da ponujajo prepričljiva psihološka pojasnila naše »napake«. V takih primerih bi izkustvo kazalo neresničnost matematičnih izjav, o katerih se pogovarjamo. Drugi ugovor, ki ga želim preučiti, je osnovan na zaskrbljenosti, da je teza (5) premočna. V nekem smislu mislim, da je zaskrbljenost upravičena: videli bomo, da je lahko tezo (5) mogoče uporabiti kot zelo učinkovito orožje proti apriorizmu. Trdil bi, kajpada, da teza (5) kaže osnovno predpostavko apriorizma, predpostavko, ki se je aprioristi morda niso zavedali. Apriorna jamstva morajo biti sposobna jamčiti prepričanje na ozadju vsakršnega izkustva, to pa pomeni (kot (5) v bistvu trdi), da morajo pripadati k tipom, ki so nedvomni. Da bi videli, zakaj je tako, bi morda bilo v pomoč, če bi se spomnili naše razprave o načinih, na katere lahko ozadje izkustva ovrže sposobnost procesov, ki bi običajno jamčili prepričanje. Če imaš razlog, da verjameš, da te tvoji čuti včasih zavedejo, potem, če imaš tudi razlog, da misliš, da je zaznavno prepričanje, ki si ga pripravljen oblikovati, napačno, tvoj zaznavni proces (ki je lahko dejansko popolnoma normalen) ne jamči prepričanja. Teza (5) posplošuje ta nauk. Ko imam enkrat razloge za prepričanje, da nas lahko določen tip procesa vodi na napačno pot, potem bi se morali strinjati, da bi lahko kljubovalno izkustvo prevesilo tehtnico proti njemu. Da se drugače izrazim, če razveljavljamo nasprotne podpore izkustvu, oblikujemo naša prepričanja na osnovi neempiričnega procesa, potem bomo, ko bomo imeli razlog za dvom v zanesljivost procesov tega tipa, postali lahek plen iracionalnosti in dogmatizma.

Poskušal sem pokazati, da je jedro težave natančnosti točka z možnostjo za široko segajoče kritike apriorizma. Zdaj bom poskušal pokazati, kako to velja za konstruktivistične različice apriorizma, ki jemljejo nasproten krak naše dileme od tistega, ki si ga je izbral Kant.

Zatrjevanje, da matematika opisuje lastnosti začasnih in privatnih miselnih bitnosti, ni privlačno stališče za apriorista. Mimogrede bom preprosto pripomnil, da očitno obstajajo resne težave s tem, da imamo apriorno spoznanje s skupno vsebino in da imamo enako apriorno spoznanje ob dveh različnih časih. Jedro konstruktivističnega apriorizma je, da lahko imam apriorno spoznanje značilnosti konstrukcije, ki je trenutno prisotna v našem duhu. Če bi to spodletelo, potem je to stališče propadlo. Zdaj smo v Kantovem primeru ugotovili, da je ta teza ranljiva: Kant bi bil v zmoti, če bi vztrajal, da čista intuicija (zor) prinaša apriorno spoznanje natančnih značilnosti diagramov, ki jih rišemo. Naša razprava nas je pripeljala do rezultata, ki omejuje konstruktivistični apriorizem: konstruktivistični apriorist mora trditi, da imamo sredstva za dojemanje tistih lastnosti naših konstrukcij, ki se lahko izognejo vsakemu sumu, da bi nas lahko zapeljale. Ali imamo takšna sredstva?

Lahko bi pomislili, da jih imamo. Konec koncev, naše konstrukcije so *naše* in smo zlahka zvabljeni v prepričanje, da morajo biti za nas jasne. Vendar pa je to podcenjevanje potencialne kljubovalnosti izkustva. Konstruktivisti nam ne povedo veliko o načinih, kako mi dojemamo naše konstrukcije – četudi bi konstruktivisti verjetno odklonili Kantov očiten poskus biti informativen kot preveč grob. Toda za vsak tip postopka, ki ga lahko predvidimo, obstaja neke vrste izkustvo, ki bi ogrozilo naše zaupanje vanj. Vsakdo od nas bi se lahko soočil z eksperimenti, ki bi dokazali (ali bi se zanje prepričljivo zdelo, da dokazujejo) korelacijo med izvedbo določenih tipov konstrukcije (o katerih introspektivno poročajo subjekti) in posebnimi vrstami možganskih stanj. Potem bi nam lahko pokazali poskuse, ki bi razkrili, da so bile naše sodbe včasih v nasprotju s tistimi, ki so bile napovedane na osnovi korelacij. Če bi nam bila ponujena tudi diagnostična razlaga, ki bi navidezno identificirala pomanjkljivosti v nevronskem mehanizmu, ki naj bi uprimerjal naše odkritje naših konstrukcij, bi naše izkustvo resnično ogrozilo zanesljivost naših sredstev za dojemanje značilnosti konstrukcij. Tako konstruktivisti ne morejo preprosto *domnevati*, da imamo apriorno spoznanje naših pričujočih konstrukcij. Pokazati morajo, da se lahko proces dojemanja takšnih konstrukcij upira grožnji, ki izhaja iz takih izkustev.

Na tej točki bom pustil konstruktivistični apriorizem s sklepom, da celo njegova najbolj minimalna osrednja teza ni nesporno resnična. V naslednjem razdelku bom okrepil moj napad na to osrednjo tezo z nadaljnjim razvijanjem analognega argumenta proti realističnemu apriorizmu.

## III

Tako kot konstruktivisti se tudi veliko matematičnih realistov rado sklicuje na matematično intuicijo. Moja raziskava o tem, ali lahko intuicija, interpretirana v realističnem stilu, da osnovno apriorno matematično spoznanje, bo krajša, kot je bila ustrezna preiskava konstruktivistovih sklicevanj na intuicijo. Obstaja preprost razlog za razliko. Realistična epistemologija matematike redko

zagotavlja več kot fragmentarne metafore[9], odsotnost podrobnosti pa otežuje oceno obljube pojasnila spoznanja. Kljub temu bom poskušal pokazati, da realistov pojem intuicije ne more izpolniti standardov, ki jih zahtevajo osnovna apriorna jamstva.

Osrednje načelo matematičnega realizma je teza, da so matematične izjave resnične ali neresnične zaradi značilnosti od duha neodvisne matematične realnosti. Teza je standardno artikulirana s predpostavko, da obstaja domena od duha neodvisnih matematičnih objektov (množic, števil), katerih lastnosti poskušajo opisati matematiki. Ko je realizem artikuliran na ta način, bom imenoval iz tega izhajajoče stališče *platonizem. Prima facie* sta realizem in platonizem različni stališči. Trdil bom, kajpada, da obstajajo ubranljive neplatonistične oblike realizma.[10] Zato, ker je platonizem kajpada najbolj priljubljena različica realizma, se bom osredinil na poskuse izdelave platonistične teorijo apriornega matematičnega spoznanja. Mislim, da bo očitno, da je kritiko, ki jo usmerjam proti tej teoriji, mogoče v enaki meri nanesti na druge realistične aprioristične pristope.

Z dobrim razlogom platonisti predpostavljajo, da matematični objekti niso običajni fizikalni objekti. Ne glede na dejstvo, da verjetno ni dovolj fizikalnih objektov, ki ustrezajo platonistovi smeri, bi bilo neverjetno predpostaviti, da je resničnost matematičnih izjav odvisna od usode posameznih fizikalnih objektov. Torej so matematični objekti vzeti kot *abstraktni*: nimajo prostorsko-časovnih lokacij in, vsaj v skladu z nekaterimi stališči, ne vstopajo v vzročne povezave z drugimi bitnostmi. Podoba, ki nastaja, je univerzum matematičnih objektov, ki ga je matematik raziskal na vzporeden način s tistim, kakor naravoslovec raziskuje fizikalno domeno.

Kako matematični raziskovalec skicira značilnosti te abstraktne domene? On običajno sledi analogiji z naravoslovjem. Tako kot ima naravoslovec v čutnem zaznavanju osnovni način dostopa do objektov, ki jih želi opisati, način dostopa, ki ustvarja spoznanje teh objektov, se prav tako predlaga, da ima matematik osnovni način dostopa do objektov, ki ga zanimajo, in z izvajanjem tega prihaja do osnovnega matematičnega spoznanja. Ker so matematični objekti abstraktni, ne pa fizični, je navadno držalo, da matematikov vir spoznanja ni čutno zaznavanje. Toda za ta vir se predpostavlja, da je podoben čutnemu zaznavanju v tem, da je vrsta procesa, ki povzroča kot rezultat prepričanja, ne da bi jemal prepričanja za vhod; za vir se predpostavlja, da ponuja nesklepalno spoznanje. Naj to imenujemo »matematična intuicija«, upoštevajoč, da se njena delovanja precej razlikujejo od tistih procesov, ki so jih predpostavljali Kant in drugi konstruktivisti.

[9] Izjema je »Perception and Mathematical Intuition« Penelope Maddy. Za razpravo glej opombo 16, spodaj.

[10] Realistične pristopi k matematični resnici, ki se razlikujejo od standardnega platonizma, je ponudil Michael Resnik (»Mathematical Knowledge and Pattern Recognition« in »Mathematics as a Science of Patterns: Ontology«) in Michael Jubien (»Ontology and Mathematical Truth«). Pojasnilo, predlagano v 6. poglavju, je lahko uzrlo kot tip realizma.

Odkritosrčen izrek stališča, do katerega smo prišli, lahko najdemo v slavnem odlomku Kurta Gödla.

> »Ampak kljub njihovi oddaljenosti od čutnega izkustva dejansko imamo nekaj podobnega zaznavanju tudi pri objektih teorije množic, kot je razvidno iz dejstva, da se nam sami aksiomi vsiljujejo, kot da so resnični. Ne vidim nobenega razloga, zakaj bi morali imeti manj zaupanja v to vrsto zaznavanja, to je, v matematično intuicijo, kot v čutno zaznavanje, ki nas spodbuja, da zgradimo fizikalne teorije in pričakujemo, da se bodo bodoče čutne zaznave strinjale z njimi in, potemtakem, verjamemo, da vprašanje, ki zdaj ni odločljivo, ima pomen in bo odločljivo v prihodnosti«.[11]

V tem odlomku Gödel ne trdi, da matematična intuicija proizvaja apriorno spoznanje. Kljub temu obstaja očiten način, kako njegove opombe spodbujajo privržence apriorizma. Matematična intuicija je neempirični proces. Zato bo vsakdo, ki pomeša neempirične procese, ki dejansko jamčijo prepričanje, z apriornimi jamstvi, bral Gödla, kot da ta potrjuje apriorizem. Četudi kdo ne naredi te zmešnjave, bodo matematične intuicije, ki jih Gödel domneva, procesi, ki so na voljo vsakemu primernemu izkustvu, tako da bo pogoj (3a) izpolnjen.

Gödlovski predlog naleti na pomemben teoretski izziv, ki je prevladoval v nedavni razpravi o platonizmu. V sijajnem eseju[12] Paul Benacerraf kaže, da obstaja vidna napetost med platonističnim stališčem o matematični resnici in tremi drugimi verjetnimi tezami: (a) spoznanje matematičnih objektov zahteva vzročno povezavo med matematičnimi objekti in spoznavajočim subjektom; (b) v skladu s platonistično pojasnitvijo ne more obstajati vzročna povezava med matematičnimi objekti in drugimi bitnostmi; in (c) mi vemo nekaj matematike. (Tukaj (a) velja kot posledica vzročne teorije spoznanja; (b) izhaja iz platonistične karakterizacije matematičnih objektov kot abstraktnih). Benacerrafova poanta vzbuja dvom o sposobnosti Gödlovega hipotetičnega procesa, da ustvarja spoznanja. Platonisti so si prizadevali, da bi se izognili tej težavi.[13] Namesto da bi pregledovali celoten vozel vprašanj, ki so iz tega nastala, bom vztrajal na kritikah, ki so pravokotne na tiste, ki jih je podal Benacerraf. Tudi če bi dopuščali splošno možnost procesa, ki proizvaja spoznanje, podobno temu, ki ga je predvideval Gödel, se še zmeraj porajata dve pomembni vprašanji: (i) ali imamo sposobnost za doživljanje takih procesov? in (ii) ali bi lahko ta tip procesa proizvedel *apriorno spoznanje*?

Kako prepoznamo, če imamo sposobnost gödlovske intuicije? Platonisti nam zelo malo povedo o značaju intuicij. Gödlove opombe so tipične: intuicija je uvedena po analogiji s čutnim zaznavanjem, in to je konec zadeve. Zdi se, da je situacija v nasprotju s Kantovim sklicevanjem na intuicijo, ker nam kantovci lahko povedo, kako si dajemo geometrijske intuicije, nas usmerjajo, da skiciramo like in jih pregledujemo z očesom uma. Platonisti lahko odvrnejo, da

[11] »What is Cantor's Continuum Problem?«, str. 271.
[12] »Mathematical Truth«. Glej tudi Jonathana Lear, »Sets and Semantics«; Jubien, »Ontology and Mathematical Truth«.
[13] Steiner, *Mathematical Knowledge*, 4. poglavje; Maddy, »Perception and Mathematical Intuition«.

je to nasprotje površno. Nekomu lahko povemo, kako izvesti proces z zmanjševanjem tega procesa na zaporedja bolj primitivnih procesov, ki jih naši učenci že znajo izvesti. Če procesa, ki ga poskušamo opisati, ni mogoče reducirati na ta način, potem ne bomo mogli ponuditi nobenih koristnih navodil. Platonisti lahko trdijo, da je prav to njihov težavni položaj, ko se jih sprašuje, čemu so intuicije podobne, in dodajo za dobro mero, da so kantovski opisi intuicij malo boljši v tem, da bodo kantovci prisiljeni pojasniti pojem »pregled z očesom duha«.

Čeprav ima platonist svojo poanto, njegova nesporna nezmožnost, da opiše intuicijo, daje podlago za skepticizem. Kako lahko platonisti odgovarjajo tistim, ki se sprašujejo, ali so izvedli intuicije, ali je *kdorkoli* izvedel intuicije? Zdi se, da obstajata dve možni strategiji. Lahko se sklicujemo na pričanje matematikov ali pa lahko trdimo, da mora obstajati nek proces predvidenega tipa. Prva pot je bolj neposredna. Če je skeptik lahko prepričan, da matematiki v sebi prepoznavajo procese intuicije, ki jih seznanijo z osnovnimi dejstvi o matematičnih objektih, potem bo upravičeno sklepal, da bodisi nima sposobnosti za intuitivno spoznanje (tako šteje sebe za nekoga, ki je slep ali gluh) bodisi da mu ni uspelo identificirati vaje te sposobnosti v sebi. Ta metoda nasprotovanja skepticizmu z matematično avtoriteto je bila kajpada manj priljubljena kot strategija zatrjevanja, da mora obstajati proces, ki zagotavlja osnovno spoznanje o matematičnih objektih.

Odločitev za platonistično epistemologijo močno sloni na argumentu za platonistično ontologijo. Platonisti standardno trdijo, da smo prisiljeni gledati na matematiko, kot da sporoča dejstva o od duha neodvisnih abstraktnih objektih, če naj pojasnimo matematično resnico. Pojem matematične intuicije je potem uveden z zasledovanjem poti, ki smo jo izsledili na začetku tega razdelka. Če je to celotna zgodba o matematični intuiciji, potem lahko izpeljemo nekaj pomembnih sklepov. Prvič, procesi intuicije so teoretične bitnosti v smislu, da so bitnosti, v obstoj katerih verjamemo, ker imamo posebno teorijo, v tem primeru teorijo o naravi matematike in našega matematičnega spoznanja. Teorijo je mogoče izpodbiti bodisi na podlagi tega, da se sooča z resnimi težavami pri pojasnjevanju pojavov, s katerimi naj bi se ukvarjala, bodisi zato ker je na voljo boljša teorija.[14] Drugič, kar vemo o procesih intuicije, je tisto, kar nam ta teorija govori o njih, to pa ni zelo veliko. S sprejemanjem posredne strategije dokazovanja, da je pojem intuicije potreben za dopolnitev ontologije, ki nam je vsiljena, platonist opušča idejo, da lahko matematiki prepoznavajo procese intuicije, ki jih opravljajo. Dejansko platonist odgovarja skeptiku s sočutjem: »Tako kot ti, ne morem identificirati procesov intuicije v sebi, vendar sem podal nepremagljive razloge za razmišljanje, da ti obstajajo; in predpostavljam, da potekajo v tebi, tako kot potekajo v meni«. Kot bomo videli v nadaljevanju, je to škodljiva dopustitev, če platonist želi biti apriorist.

Ali se je mogoče tej dopustitvi izogniti? Najbolj obetavna ideja za platonista je dopustiti, da skeptik ni netipičen, da ta ni pomanjkljiv ali da se ne zaveda, kaj se

[14] Benacerrafov esej »Mathematical Truth« je mogoče razložiti kot predlog prve kritike. Moj cilj v 6. poglavju je dati vsebino zadnji kritiki.

dogaja v njegovem miselnem življenju, ampak da je intuicija prednost nadarjenih (morda izjemnih) matematikov. Morda lahko uporabimo pričevanje matematikov, da pokažemo, da *nekaterim* ljudem, morda neopazni manjšini, intuicija rabi kot način osnovnega spoznanja. Ta pristop izrablja dvoumnost »intuicije«. Ko matematiki govorijo o intuiciji, po navadi to počnejo v kontekstu razpravljanja o reševanju problemov. Velike ustvarjalne matematike – kot so Euler, Riemann in Ramanujan – pogosto hvalijo zaradi njihovih sposobnosti intuitivnega sklepanja. Občudovati Riemannove intuicije (ali, bolj skromno, intuicije obetavnega študenta) pomeni prepoznati sposobnost pridobivanja nenavadnega in plodnega gestalta o problemu. Intuicija tega tipa je pogosto *uvod v* matematično spoznanje. Sama po sebi ne jamči prepričanja, čeprav lahko igra pomembno hevristično vlogo in tudi rabi kot *del* procesa jamstva. Nadalje, ta vrsta intuicije se običajno uveljavlja pri reševanju raziskovalnih problemov, ne v spoznanju aksiomov. Nadarjeni matematik obravnava kljubovalen problem z novega zornega kota, »intuitivno spoznava«, da bo določen prijem pomagal pri seštevanju nizov ali preračunavanju integrala, da se problem v teoriji števil omejuje na rezultat v teoriji funkcij. Skrivnost njegovega uspeha se ne šteje za neko posebno sposobnost razločevanja značilnosti matematične realnosti. O matematiku ne razmišljamo kot o tistem, ki strmi v matematične objekte in dobi uspešno idejo. Intuicije, o katerih pogosto govorijo matematiki, niso tiste, ki jih zahteva platonizem.

Kljub temu obstaja ena vrsta običajne opombe, ki se zdi pomembna za platonistov program. Spomnimo se Gödlove trditve, da »se nam sami aksiomi vsiljujejo, kot da so resnični«. Predpostavimo lahko (kot se res zdi, da Gödel predpostavlja), da prisotnost občutka seznanjenosti z osnovnimi načeli, smisel njihove očitne pravilnosti, signalizira dejstvo, da je naše prepričanje vanje ustvarila intuicija matematične realnosti. To stanje »domačnosti« je mogoče tako uporabiti za identificiranje pojava intuicij v nas. Toda dejstvo, da se nam zdijo aksiomi teorije množic (recimo) očitni, nam ne zagotavlja, da naše prepričanje v te aksiome ustvarja proces, v katerem neposredno dojemamo matematične objekte. Tudi če bi sprejeli platonistično stališče o naravi matematične realnosti, bi lahko prejeli drugačno razlago tega pojava. Morda občutek evidence izhaja iz uporabe tistih pojmovnih sposobnosti, ki smo jih pridobili, ko smo se učili govoriti o množicah. Ali pa morda to izvira iz poučevanja, ki smo ga bili deležni v naši matematični mladosti. V nadaljevanju bom podrobneje raziskal obe tekmujoči hipotezi. Za zdaj želim le poudariti, da so opombe o »intuitivni razvidnosti matematičnih prvih načel« odprte za različne razlage in da platonistična epistemologija predlaga neko posebno hipotezo. Intuicije so bitnosti, ki jih uvaja epistemološka teorijo, tisto pa, kar nam ta teorija govori, izčrpa naše spoznanje o njih. Ni nobenega razloga za prepričanje, da ima kdorkoli (vključno z Gödlom in drugimi uglednimi matematiki) neko posebno znanje o tem, kako je, če jih imamo.

## IV

Zdaj bom trdil, da ta nedostopnost intuicij, prava nevednost o njihovi naravi, zaradi česar je platonistična epistemologija tako nejasna, govori proti tezi, da so intuicije apriorna jamstva. V zgoraj navedenem odlomku Gödel trdi, da ne smemo misliti, da je intuicija manj zanesljiva kot običajno čutno zaznavanje. Naša razprava v II. razdelku pojasni, da bi bilo potrebno več kot to, če naj bi intuicije štele za apriorna jamstva. Moji argumenti proti platonističnemo aprioristu se bodo oprijeli načela, ki je povezano s tistim načelom, ki sem ga uporabil proti kantovcem. Recimo, da je tip procesa *dvomljiv* samo v primeru, kjer obstajajo možna življenja, glede na katera je oseba lahko izpeljala nek proces tega tipa, ampak glede na katera bi se ta oseba zavedala svoje nesposobnosti razlikovanja tipa izvedenega procesa od drugih procesov, za katera je znano, da ustvarjajo napačna prepričanja. Predpostavimo, da preiskujemo status procesa $\alpha$ kot apriornega jamstva za prepričanje, da *p,* in da smo identificirali tip razpoložljivosti o. Potem, vzporedno s tezo (5), menim,

Če je tip razpoložljivosti a dvomljiv in če obstajajo ustrezna življenja, ki bi kazala neresničnost p-ja, potem obstajajo ustrezna življenja, glede na katera razpoložljivi procesi istega tipa kot a ne bi jamčili prepričanja, da *p.*

Osnovno načelo za tezo (6) je, da če a pripada k dvomljivemu tipu in če obstajajo ustrezna življenja, ki kažejo neresničnost p-ja, bi življenje, ki daje en razlog, da se sprašujem, ali je bil razpoložljivi proces tega tipa take vrste, ki je zmožna povzročanja napačnih prepričanj in tudi kazanja neresničnosti p-ja, ta proces oropalo njegove sposobnosti, da jamči prepričanje, da *p.* Zanašanje na ta proces v luči nasprotnega izkustva bi spodkopalo legitimno vprašanje, ali nismo storili napake, ki je znana iz drugih primerov. Ko sem spoznal, da ne bi mogel ločiti danega procesa od drugega, za katerega sem naknadno izvedel, da *je* proizvedel napačno prepričanje, bi bil nerazumen, če bi oblikoval prepričanje, da p, na podlagi tega procesa.[15]

[15] Osnovno načelo za (6) je očitno sorodno s tistim, ponujenim za (5). V obeh primerih se soočamo s svetovoma, v katerih ima subjekt dokaz proti *p* in poskuša ovreči dokaz z uporabo razpoložljivega procesa. V primeru (5) ima subjekt razloge za prepričanje, da nekateri procesi tega tipa povzročajo napačna prepričanja. V primeru (6) subjekt prepoznava svojo nesposobnost razlikovanja procesov tega tipa od procesov, za katere se ve, da povzročajo napačna prepričanja. Glede na obe vrsti položaja – obe »epistemski omejitvi« – je za subjekt neracionalno, da razveljavi nasprotni dokaz. Zaradi dveh različnih razlogov nisem ponudil nobene jasne kritike nedavnega poskusa zagovarjanja platonistovega apriorizma s strani P. Maddy. Prvič, njeno stališče je različica stališča, ki ga imenujem »konceptualizem«, ne pa nauk, ki je podoben Gödlovemu. Maddy verjame, da smo sposobni razviti nekatere nevrofiziološke mehanizme, ki nam omogočajo, da zaznavamo (nejasne) množice. Ko so enkrat ti mehanizmi vzpostavljeni, so sposobni ustvariti prepričanja o aksiomih teorije množic. Kolikor Maddy ponuja pojasnitev o eksplicitnem spoznanju teoretikov teorije množic (ne pa pojasnitev nekega »tihega spoznanja«, ki ga imajo vsi tisti, ki so si pridobili »detektorje za množice«), je ta pojasnitev blizu stališču, ki ga obravnavamo v naslednjem poglavju. Drugič, in bolj pomembno, Maddy izrecno dovoljuje, da so lahko prepričanja, ki jih ustvarja delovanje njenih domnevno nevrofizioloških mehanizmov, napačna. Glede na to priznanje in analizo o apriornem spoznanju, ki sem ju ponudil, je zlahka uzreti, da tako povzročeno spoznanje ni apriorno.

Da bi uporabil (6) proti platonističnemu apriorizmu, moram pokazati tako, da so tipi razpoložljivosti platonistovičnih intuicij dvomljivi kot da obstajajo ustrezna življenja, ki kažejo neresničnost matematičnih izjav, glede na platonistično interpretacijo teh izjav. Prvo poanto lahko brez težav naredimo, če si prikličemo v spomin nekatere epizode iz zgodovine matematike. Ob več priložnostih v preteklosti so matematiki pozdravili nekatera načela kot intuitivno očitna in jim da li enak status, kot ga dajemo aksiomom teorije množic. Potem se je pač izkaza lo, da so ta načela napačna. Najbolj znani primeri so primeri Fregeja, Dedekind in Cantorja, od katerih je vsak predlagal univerzalno načelo dojemanja, tako da je vzel vsako lastnost, kot da določa množico. To še zdaleč ni edini primer te vrste. Veliko matematikov osemnajstega stoletja je verjelo v samorazvidnost »zakona kontinuitete«, ki pravi, da tisto, kar velja do limite, drži tudi na limiti. Obstoj takšnih primerov nas lahko zaskrbi. Tudi *če* dovolimo, da matematiki lahko in dejansko tudi doživljajo platonistične intuicije, se moramo vprašati, ali procesi, ki jih doživljajo sodobni matematiki, so ali niso bistveno drugačni od tistih, ki so jim bili podvrženi naši zavedeni predniki. Zastavljanje tega vprašanja razjasni, da je za nas, z našim izkustvenim ozadjem, razumno verjeti, da ne moremo razlikovati intuicij od procesov, za katere se ve (po dejstvu), da dajejo napačna prepričanja. Iz tega sledi, da so tipi razpoložljivosti intuicij, za katere platonist trdi, da jih doživljamo, dejansko dvomljivi.

Pri razpravljanju o matematični intuiciji si Gödel sam zastavlja vprašanje o pomenu paradoksov naivne teorije množic. Takoj po odlomku, ki sem ga navedel, Gödel piše: »Paradoksi teorije množic niso skoraj nič bolj mučni za matematiko, kot so iluzije čutov za fiziko«. Podobnost med paradoksi in čutnimi iluzijami se mi zdi pravilna. Če predpostavimo, da obstajajo dejanske matematične intuicije, potem sposobnost takih procesov, da ustvarijo spoznanje, ni izpodbita z našo nesposobnostjo razlikovanja od procesov, ki povzročajo napačna prepričanja, nič bolj, kot je možnost čutnega spoznanja izključena zaradi težave razlikovanja verodostojnih od neverodostojnih čutnih procesov. Kjer so naše razlikovalne pomanjkljivosti *dejansko* pomembne, je to primerih, kjer izkustvo kaže, da je prepričanje, ki smo ga oblikovali, zmotno, in to velja tako za zaznavanje kot za matematično intuicijo. Obstoj iluzij čutov ni ovira za naše spoznanje fizike; je kamen spotike za tezo, da bi lahko čutni procesi, ki dejansko jamčijo naša prepričanja, še naprej tako delovali, ne glede na izkustvo, ki bi ga imeli. Podobno, paradoksi teorije množic ne izzivajo možnosti matematičnega spoznanja, vendar ogrožajo apriorizem.[16]

[16] Zaradi dveh različnih razlogov nisem ponudil nobene jasne kritike nedavnega poskusa zagovarjanja platonistovega apriorizma s strani P. Maddy. Prvič, njeno stališče je različica stališča, ki ga imenujem »konceptualizem«, ne pa nauk, ki je podoben Gödlovemu. Maddy verjame, da smo sposobni razviti nekatere nevrofiziološke mehanizme, ki nam omogočajo, da zaznavamo (nejasne) množice. Ko so enkrat ti mehanizmi vzpostavljeni, so sposobni ustvariti prepričanja o aksiomih teorije množic. Kolikor Maddy ponuja pojasnitev o eksplicitnem spoznanju teoretikov teorije množic (ne pa pojasnitev nekega »tihega spoznanja«, ki ga imajo vsi tisti, ki so si pridobili »detektorje za množice«), je ta pojasnitev blizu stališču, ki ga obravnavamo v naslednjem poglavju. Drugič, in bolj pomembno, Maddy izrecno dovoljuje, da so lahko prepričanja, ki jih ustvarja delovanje njenih domnevno nevrofizioloških mehanizmov, napačna. Glede na to priznanje in analizo o apriornem spoznanju, ki sem ju ponudil, je zlahka uzreti, da tako

Edino vprašanje, ki ga je treba rešiti, je, ali lahko ali pa ne more obstajati izkustvo, ki kaže neresničnost matematičnih izjav, glede na platonistovo interpretacijo teh izjav. Platonisti imajo dve možnosti. Lahko bodisi predlagajo, da lahko najdemo resničnostne vrednosti matematičnih izjav z enostavnimi empiričnimi sredstvi (opazovanjem, eksperimentiranjem in tako naprej), bodisi lahko zanikajo, da nas lahko takšna empirična sredstva kdajkoli privedejo do ugotovitve, ali so matematične izjave resnične ali neresnične. Za sprejemanje prvega predloga se zdi, da podpira idejo, da nas je izkustvo lahko zavajalo s predlogom, da so nekatere (resnične) matematične izjave neresnične: če lahko opazovanje in eksperimentiranje razkrivata resničnostne vrednosti matematičnih izjav, potem bi lahko, kot se nam zdi, poskrbeli za to, da zavajajoče izkustvo ponuja neresnične matematične predloge. Alternativni pristop, ki zavrača, da lahko izkustvo razkrije matematično realnost, se izogiba tej očitni posledici, vendar na račun opuščanja primarne odlike platonistične ontologije, in sicer njene sposobnosti, da pojasni uporabo matematike v znanosti.[17] Po *obeh* predlogih kajpada obstaja vsaj ena vrsta izkustva, ki nam lahko pokaže, da so prepričanja, ki smo jih oblikovali na podlagi intuicije, napačna. Matematična prepričanja so občutljiva na družbene izzive. Takšni izzivi so zadostna nevarnost, da bi bilo za nas nerazumno, da bi oblikovali prepričanja na podlagi intuicije, ko spoznamo, da ne moremo razlikovati naših intuicij od procesov, ki so zavedli naše prednike. Pravzaprav mislim, da se platonisti niso sposobni upreti sklepu, da obstajajo neposredni in teoretski izzivi za matematične izjave. Kakorkoli, kazanje tega bi bilo bolj zapleteno, obstoj družbenih izzivov pa je dovolj, da se naredi moja poanta.

Argument tega poglavja lahko predstavimo na naslednji način. Intuicija je najljubši proces matematičnih aprioristov. Apriorist lahko bodisi izbere drzno pot, namreč, da identificira intuicijo z nekim procesom, za katerega priznavamo, da poteka v našem miselnem življenju, bodisi lahko pusti intuicijo kot proces, ki ga označuje zgolj njegova vloga pri tem, da nam da matematično spoznanje. Prvi pristop tvega, da ko je narava procesa razkrita, se nanj ne bo gledalo, kot da izpolnjuje standarde, ki se zahtevajo od apriornega jamstva. (Kantov predlog je ranljiv ravno na ta način). Vendar ne bo pomagalo, če bi se umaknil v nejasnost, ker je naša priznana nevednost o naravi tega procesa sama po sebi ovira za to, da bi deloval kot apriorno jamstvo. Sklepam, da intuicija, bodisi konstruktivistična bodisi platonistična, bodisi jasno določena bodisi slabo opredeljena, ne bo opravila dela, ki ga apriorist zahteva od nje.

povzročeno spoznanje ni apriorno.

[17] V 6. poglavju predlagam, da je lahko platonizem manj uspešen pri zagotavljanju tega tipa pojasnitve, kot se običajno šteje, da je.