ANαliZA

časopis za kritično misel

Letnik 3, številka 3-4, junij 2000 · ISSN 1408-2969

FILOZOFIJA JEZIKA MICHAELA DUMMETTA

Michael Dummett

Wittgensteinova filozofija matematike

prevedel Gregor Golobič

Citiranje: Michael Dummett, »Wittgensteinova filozofija matematike«, *Analiza: časopis za kritično misel* 3, št. 3-4 (1999): 82–98.

Prevod. Licenca Creative Commons, ki velja za arhiv revije, za prevode ne velja; pravice izvirnika pripadajo njegovim imetnikom.

Izdajatelj: Društvo za analitično filozofijo in filozofijo znanosti, Ljubljana.

Elektronska različica je bila leta 2026 rekonstruirana iz izvirnih stavnih datotek in preverjena s tiskano izdajo. Številke strani ustrezajo tiskani izdaji; prelomi strani znotraj prispevka se lahko nekoliko razlikujejo.

Michael Dummett
prevedel Gregor Golobič

WITTGENSTEINOVA FILOZOFIJA MATEMATIKE*

Od časa do časa je Wittgenstein v posameznih beležnicah zabeležil ideje o filozofiji matematike, ki so mu prišle na misel. Njegove nedavno izdane *Opazke o temeljih matematike* sestojijo iz izvlečkov, ki so jih uredniki naredili iz petih takšnih beležnic. Niti teh niti katerih drugih opazk iz teh beležnic avtor ni nameraval izdati v knjižni obliki. Da tega kot takšnega ne moremo upoštevati in ne bi smeli kritizirati, nas ne preseneča, čeprav prinaša razočaranje. Veliko misli je izraženih na način, ki ga je avtor štel kot nenatančnega in nejasnega; nekateri odlomki so v protislovju z drugimi; nekateri so zelo neprepričljivi; nekateri so v nasprotju z idejami, ki jih je sicer imel Wittgenstein, vendar te ideje v sami knjigi niso jasno izražene; še drugi odlomki, posebej tisti o konsistentnosti in Gödelovem teoremu, so slabi oziroma vsebujejo jasne napake. Ker je tako, je treba knjigo obravnavati kot takšno, kakršna je – izbor iz beležk velikega filozofa. Kot je dejal Frege o svojih neobjavljenih spisih: vsi niso suho zlato, vendar v njih je zlato. Ena od nalog bralca je potemtakem izločiti zlato.

V razgovorih sem pogosto naletel na vtis, da je to značilno za Wittgensteinova dela v celoti; mnogokrat sem slišal, kako so *Raziskave* označili kot dvoumne in neprepričljive. To se mi zdi travestija resnice; ta knjiga z veliko jasnostjo izraža mnogo prepričljivih, globokih in zelo natančnih idej – čeprav je res, da utegne kompleksnost nekaterih misli nestrpnega bralca zmesti. Kontrast s pričujočo knjigo, ki smo ga nakazali, je docela posledica različnih izvorov obeh knjig.

V filozofiji matematike stoji platonizem nasproti raznim stopnjam konstruktivizma. Po platonizmu matematični predmeti obstajajo neodvisno od nas in so v določenih medsebojnih odnosih, naša naloga pa je, da te predmete in njihove medsebojne odnose odkrijemo. Konstruktivisti temu navadno oporekajo s sliko, po kateri mi sproti ustvarjamo in konstruiramo matematične bitnosti. Za platoniste mora biti pomen matematične izjave razložen v okviru njenih resničnostnih pogojev; za vsako matematično izjavo obstaja v matematični realnosti nekaj, zaradi česar je resnična ali neresnična. Primer za takšno razlago pomena v okviru resničnosti in neresničnost je razlaga stavčnih veznikov z resničnostno tabelo. Za konstruktivi-

** Prevod je narejen po Michael Dummett, "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, London 1978, str. 166-185. Članek je pod istim naslovom izvirno izšel v *The Philosophical Review*, vol. LXVIII, 1959, str. 491-509. – op. prev.

ste pa mora biti splošna forma razlage pomena podana v okviru pogojev, v katerih upravičeno zatrjujemo neko izjavo, to je v okviru okoliščin, v katerih posedujemo dokaz. Na primer: izjava, ki je sestavljena iz dveh, z nekim veznikom povezanih izjav, mora biti razložena s pojasnilom trditve, ki dokazuje sestavljeno izjavo v okviru tistega, iz česar sestoji trditev, da je dokazala obe sestavni izjavi; tako bo trditev, da je [*A* ali *B*] dokazano, postala trditev, da imamo metodo, ki vodi bodisi k dokazu za *A* bodisi k dokazu za *B*. Kam bo to v praksi pripeljalo, bo odvisno od stopnje privzetega konstruktivizma; če se omejimo, na primer, na odločljive izjave, potem bo resničnostna tabela dobila sprejemljivo interpretacijo in bo uporabna celotna klasična logika; če pa po drugi strani z intuicionisti dopuščamo, da je razumljiv mnogo širši krog matematičnih izjav, potem bo v splošnem prenehal veljati zakon izključene tretje možnosti in še mnogi drugi klasično veljavni zakoni. V obeh primerih pa je za konstruktiviste pojem dokaza – ne pa pojma resnice in neresnice – osrednji pojem za presojanje pomena matematičnih izjav.

Na platonizem in razne različice konstruktivizma lahko gledamo – če ne upoštevamo predmeta, ampak metodo dokazovanja – ne kot na tekmece, marveč samo kot na načine razmejevanja različnih področij matematike. V tem primeru gre samo za bistvene matematične probleme jasnega formuliranja različnih pojmovanj in za podrobno raziskovanje matematičnih posledic vsakega posebej. Če pa po drugi strani gledamo na različne šole kot na tekmece, potem ostaja filozofski problem odločanja o tem, katera od številnih razlag je pravilna. Wittgensteinova knjiga je mišljena samo kot prispevek k slednji nalogi. Zdi se naravno domnevati, da gresta filozofska in matematična naloga z roko v roki; kajti natančna formulacija nekega pojmovanja ni nebistvena za odločanje o njegovi pravilnosti, nepričakovane posledice tega, da to pojmovanje privzamemo, pa nas lahko pripeljejo do revizije našega mnenja glede njegove vrednosti. Wittgenstein se ne zmeni za nič takega: zanj filozofija in matematika nimata kaj reči druga drugi; nobeno matematično odkritje ne more imeti nikakršne zveze s filozofijo matematike.[1] Lahko bi se zdelo, da je teoretično privrženec tudi nasprotnega, da nobeno filozofsko mnenje ne bi moglo – ali vsaj ne bi smelo – vplivati na postopke matematika. To se do neke mere pokaže v njegovi razpravi o zakonu o izključeni tretji možnosti v matematiki. Proti nekomu, ki vztraja pri tem, da se zaporedje "77777" bodisi pojavi v razvoju števila π bodisi ne, uporabi argument, ki je podoben intuicionističnemu; in vendarle se zdi, da ne želi podvomiti o veljavnosti, na primer, argumenta s primeri v matematičnem dokazu, ampak samo oporekati nekomu, ki želi v toku filozofske refleksije vztrajati pri zakonu izključenega tretje možnosti.[2] Vendar tega ni treba jemati preveč resno, ker bi bil Wittgenstein vselej zmožen trditi, da sicer ni pokazal, da so določeni matematični postopki *napačni*, je pa vseeno pokazal, da nimajo takšnega pomena, kot smo jim ga bili pripravljeni pripisati. V svoji razpravi o Cantorju vsekakor ni izkazal nobene bojazljivosti glede "navzkrižja z matematikom"[3]. Mislim, da ni podlage za Witgensteinovo ločevanje filozofije od ma-

[1] *Primerjaj* V, 13, 19; IV, 52; tudi *Raziskave*, II, XIV; I, 124.
[2] IV, 10.
[3] I, Dodatek II.

tematike, marveč da to izvira le iz njegovega splošnega stremljenja, da obravnava diskurz kot razcepljen v številne različne otoke, med katerimi ni komunikacije (izjave naravoslovnih znanosti, filozofije, matematike, religije).

Kot je pokazal Frege, je nominalistični ugovor platonizmu – da je govor o "abstraktnih bitnostih" nerazumljiv – slab; če verjamemo v objektivnost matematike, potem ni mogoče ugovarjati niti temu, da razmišljamo v okvirih matematičnih predmetov, niti predstavi, ki gre zraven, da ti predmeti že obstajajo in čakajo, da bodo odkriti. Prava alternativa ni niti formalizem. Formalist vztraja pri tem, da je vsebina matematičnih teoremov preprosto ta, da *če* obstaja kakšno področje, za katerega veljajo aksiomi, potem bo za to področje veljal tudi teorem; in dodal bo še, da – dokler ne vemo, da so aksiomi kategorični – ni treba, da je izjava teorije resnična oziroma neresnična. Ne bo pa zavrnil klasične logike, ker se bo strinjal, da bo na kateremkoli posameznem področju, za katerega veljajo aksiomi, izjava bodisi resnična bodisi neresnična; poleg tega pa bo dopustil, da katerakoli dana izjava bodisi sledi bodisi ne sledi iz aksiomov. Ker je izjava, da eksistira dokaz za dano izjavo iz danih aksiomov, natančno v istem položaju kot, denimo, neka eksistenčna izjava v teoriji števil, za katero nimamo niti dokaza niti ovrženja, formalist ni pridobil nobene prednosti; preklopil je zgolj z ene vrste matematičnih predmetov – števil – na druge – formalne dokaze.

Wittgenstein privzema neko različico (kot bomo videli, skrajno različico) konstruktivizma; po njegovem je za matematično izjavo bistveno, da je zatrjena kot sklep *dokaza*, medtem ko jaz predpostavljam, da za platonista bitje, ki bi *neposredno* dojemalo matematično resnico, ne posredovano s sklepanji, ne bi bilo popolnoma nesmiselno. V Wittgensteinov konstruktivizem se stekajo mnoge smeri mišljenja; najprej se bom ukvarjal z njegovim pojmovanjem logične nujnosti.

Dandanes zelo veliko število filozofov soglaša s kakšno obliko konvencionalističnega pojmovanja logične nujnosti in nemara je težko ugotoviti, kakšno osvoboditev je povzročila ta teorija. Filozofski problem nujnosti je dvojen: kaj je njen izvor in kako jo prepoznamo? Bog lahko določi, da bo nekaj veljalo v dejanskem svetu; toda, kako lahko celo Bog določi, da naj nekaj velja v vseh možnih svetovih? Vemo, kaj je potrebno storiti, da ugotovimo, ali nekaj *je* resnično; toda, kakšno razlago lahko damo o procesu odkrivanja tega, ali to *mora* biti resnično? V skladu s konvencionalizmom vso nujnost vnesemo mi, in to ne v realnost, temveč v naš jezik; neka izjava je nujna zaradi naše izbire, da ne bomo upoštevali ničesar, kar bi jo falsificiralo. Naše poznavanje logične nujnosti je postalo potemtakem poseben primer naše vednosti o naših lastnih intencah.

Konvencionalizem, ki je tako široko razširjen, je kajpada spremenjeni konvencionalizem. Čeprav vsa nujnost izhaja iz jezikovnih konvencij, ki smo jih privzeli, pa izpeljava ni vedno neposredna. Nekatere nujne izjave so naravnost zapisi konvencij, ki smo jih določili, druge so bolj ali manj oddaljene *posledice* konvencij. Tako je "Nič ne more biti v celoti istočasno zeleno in modro" neposredni zapis neke konvencije, ker v pokaznem urjenju uporabe besed za barvo ni ničesar, kar

bi kazalo, da nekaj, kar je na meji med zeleno in modro, ne smemo imenovati "hkrati zeleno in modro". "Nič ne more biti hkrati zeleno in rdeče" je po drugi strani nujno zaradi posledic pomenov "zelenega" in "rdečega", kot sta prikazana v pokaznem urjenju. Ni nam bilo treba privzeti neke posebne konvencije, ki bi izključevala izraz "hkrati zeleno in rdeče" iz našega jezika, ker bi že to, da bi kdo uporabil ta izraz, pokazalo, da se ni naučil tega, kar naj bi se naučil iz pokaznega urjenja.

Kadar ta spremenjeni konvencionalizem apliciramo na matematiko, je rezultat tega taka razlaga matematične resnice, kakršna nam je znana iz spisov logičnih pozitivistov. Aksiomi matematične teorije so nujni zato, ker so neposredni zapisi določenih konvencij, ki smo jih privzeli glede rabe terminov teorije; matematikovo delo pa je odkriti bolj ali manj oddaljene posledice tega, da smo privzeli te konvencije, katerih posledice so povzete v teoremih. Če raziskujemo, kakšen je status logičnih načel, v skladu s katerimi prehajamo od aksiomov do teoremov, je odgovor, da je soglašanje s temi načeli spet izraz tega, da smo privzeli jezikovne konvencije, v tem primeru konvencije o rabi besedic "če", "vse" in tako dalje. Ta razlaga je povsem površinska in odpravlja vse prednosti konvencionalizma, ker pušča nepojasnjen status trditve, da imajo določene konvencije določene posledice. Zdi se, da če privzamemo konvencije, zapisane z aksiomi, skupaj s tistimi, ki so zapisane z načeli sklepanja, potem *moramo* biti zvesti načinu govorjenja, ki je zaobsežen v teoremu; in *ta* nujnost nam mora biti vsiljena, nanjo moramo naleteti. Sama ne more izraziti privzetja neke konvencije. Ta razlaga ne pušča nobenega prostora za katerokoli naslednjo takšno konvencijo.

Wittgenstein se gre polnokrvni konvencionalizem; logična nujnost katerekoli izjave je zanj vselej *neposredni* izraz jezikovne konvencije. Da je dana izjava nujna, vselej izhaja iz naše izrecne odločitve, da obravnavamo prav to izjavo kot nespodbitno; ne more se opreti na to, da smo privzeli neke druge konvencije, za katere odkrijemo, da vključujejo to, da jo tako obravnavamo. Ta razlaga je uporabna tako za globoke teoreme kot za elementarne račune. Če damo primer za zadnje: merilo, ki ga privzemamo predvsem za izrekanje, da obstaja *n* stvari določene vrste, mora biti pojasnjeno z opisom postopka štetja. Toda kadar ugotovimo, da je v sobi pet dečkov in sedem deklic, rečemo, da je vseh skupaj dvanajst otrok, ne da bi jih vse skupaj prešteli. Dejstvo, da smo upravičeni v takem početju, ni nekako implicitno v samem postopku štetja; prej gre za našo izbiro, da privzamemo *novo* merilo za izrekanje tega, da je vsega skupaj dvanajst otrok, ki je drugačno od merila za štetje vseh otrok skupaj. Če bi res imeli različna merila za isto izjavo, bi se utegnilo zdeti, da se ne ujemajo. Toda nujnost "5 + 7 = 12" sestoji ravno v tem, da ne štejemo ničesar za neujemanje; če preštejemo vse otroke skupaj in dobimo enajst, rečemo: "Morali smo se ušteti."

To razlago je zelo težko sprejeti, ker se zdi, da nas matematični dokaz hočeš nočeš vodi, dokler ne prispemo do teorema. (Da je 5 + 7 = 12, smo se seveda naučili na pamet. Če pa se pojavi potreba, bi lahko predložili argument, da bi to tudi dokazali.) Toda na tem mestu vpelje Wittgenstein razmišljanja o pravilih, ki so bila

predstavljena v *Raziskavah* in drugje. Dokaz poteka v skladu z določenimi logičnimi načeli oziroma pravili sklepanja. Nagnjeni smo k domnevi, da – ko smo enkrat sprejeli aksiome, iz katerih izhaja dokaz – nekako nimamo več nobene dejavne vloge; ko nam je dokaz prikazan, smo samo trpni gledalci. Da pa bi dokazu sledili, moramo razne prehode od vrstice do vrstice prepoznati kot uporabe splošnih pravil sklepanja. Četudi bi bila ta pravila na začetku eksplicitno formulirana in bi se z njimi strinjali, to samo na sebi ne bi določilo, da prepoznamo vsak prehod iz ene vrstice v drugo kot pravilno uporabo pravil. Ko enkrat imamo dokaz, potem lahko zares rečemo, da kdor ga ne sprejema, bodisi dejansko ni mogel razumeti bodisi ni mogel dejansko sprejeti pravil sklepanja; ni pa treba, da je bilo v tem, kar je rekel ali storil, preden je zavrnil dokaz, karkoli takšnega, kar bi razkrivalo takšno nerazumevanje oziroma zavračanje pravil sklepanja. Zato na vsakem koraku prosto izberemo, ali bomo dokaz sprejeli ali zavrnili; ničesar ni v naši formulaciji aksiomov in pravil sklepanja, in ničesar v naših mislih, kadar smo aksiome in pravila sprejeli, kar bi – še preden je bil dan dokaz – po sebi kazalo na to, ali bomo dokaz sprejeli ali ne; in zato ni ničesar, kar bi nas *sililo* k temu, da dokaz sprejmemo. Če sprejmemo dokaz, potem dokazanemu teoremu podelimo nujnost; "damo ga v arhiv", in vse, kar bi govorilo proti njemu, ne šteje nič. S tem sprejmemo novo odločitev, ne pa zgolj ekspliciramo neko odločitev, ki smo jo implicitno že sprejeli.

Naravna reakcija na to je reči, da je to v precejšnji meri res, kadar nismo formulirali naših načel sklepanja oziroma smo jih formulirali nenatančno, da pa to sploh ne velja več, ko smo enkrat dosegli strogo formalizacijo. Wittgensteinova sovražnost do matematične logike je velika; pravi, da je povsem popačila razmišljanja filozofov.[4] Zaradi te opazke, ki je kot takšna preprosto smešna, je težko jasno videti vso stvar. Oglejmo si Wittgensteinov najljubši primer: nekoga urite, da izpolnjuje ukaze v obliki "Prištej *n*" s primeri, ki zajemajo dokaj majhna števila, potem pa mu date ukaz "Prištej ena" in ugotovite, da je številom od 100 do 199 prištel dve, številom od 200 do 299 tri in tako naprej. Wittgenstein pravi, da ni treba, da je sploh kaj bilo – bodisi v tem, kar ste mu rekli med urjenjem, bodisi v tem, kar vam je potem "rojilo po glavi" –, kar je na sebi kazalo, da to ni bilo tisto, kar ste mislili. To je seveda res in kaže na nekaj pomembnega glede pojma intence (zelo zbuja pozornost vprašanje, kaj je mislil Wittgenstein, ko je v *Raziskavah* rekel, da ko bi bil Bog pogledal v moje misli, ne bi bil sposoben tam videti, koga sem mislil.) Toda predpostavimo, da ga nisem uril le z zgledom, marveč sem uporabljal tudi eksplicitno formulacijo pravila za to, kako tvorimo naslednika nekega arabskega števila. Stroj lahko sledi temu pravilu; od kod dobi v tej zadevi človeško bitje svobodo izbire, ki je stroj nima?

Seveda bi lahko dokazovali, da se za nekoga zdi, da razume neko pravilo sklepanja v formalnem sistemu – recimo substitucijsko pravilo –, pa kljub temu kasneje zavrne njegovo pravilno uporabo; ostaja pa, da lahko *v* natančnem formuliranju pravila vidimo, da je bila ta uporaba upravičena. Kdo bi lahko odgovoril, da to

[4] IV, 48.

pomeni, da jemljemo za samoumevno običajno razumevanje besed ali simbolov, v katerih je to pravilo izraženo; razlaga teh besed ali simbolov bi bila nekaj podobnega Wittgensteinovi ideji pravila za interpretacijo pravila. Nedvomno je res in pomembno, da – medtem ko uporabljamo neko besedo ali simbol, v nekem smislu sledimo pravilu – to pravilo ne more biti po sebi formulirano tako, da ne bi pustilo svobode pri svoji interpretaciji, oziroma – če je to pravilo lahko formulirano tako – potem pravila za uporabo besed, iz katerih je to pravilo formulirano, ne morejo biti, po svoji strani, tako formulirana. Toda zdi se, da takšna razmišljanja sodijo na splošno prej v teorijo pomena, kot pa da bi imela kakšen poseben pomen za filozofijo matematike. Bolj se zdi, da bi morali tistemu, ki predlaga, da je potrebno Wittgensteinovi poanti o področju, ki je ostalo pri odločanju o pravilnosti uporab nekega pravila sklepanja, oporekati s tem, da se osredinimo na pravila sklepanja v formalnih sistemih, odgovoriti z navedbo tistega, kar Wittgenstein imenuje "pestrost" matematike.[5] Kakor intuicionisti želi vztrajati pri tem, da ne moremo vnaprej zarisati meje možnim oblikam argumenta, ki jih lahko uporabimo v matematičnih dokazih. Še več, pokažemo lahko, da formalni sistem ne *nadomesti* intuitivnih dokazov, kakor pogosto natančen pojem nadomesti intuitivnega, ki je nejasen. Formalni sistem tako rekoč še naprej jamči za intuitivno pojmovanje in je za nas pomemben le, dokler ne zadobi nezaželenih potez, ki jih intuitivna misel nima. Primer za to bi bil Gödelov teorem, ki kaže, da dokazljivost v nekem posameznem formalnem sistemu ne more biti popoln nadomestek za intuitivne ideje aritmetične resnice.

Predpostavimo, da presojamo izjavo neke matematične teorije. Da bi se izognili zapletom, domnevajmo, da je teorija popolna, to je, da je lahko popolnoma formalizirana, da pa pri tem ne mislimo nobenega posebnega formalnega sistema. Platonist bo potem rekel, da eksistira bodisi dokaz bodisi ovrženje izjave. Dejstvo, da je izjava resnična, če je resnična, je v eksistenci takšnega dokaza, četudi ga še nismo odkrili. Če torej dokaz eksistira, potem lahko domnevamo, da nekje obstaja nek dejanski dokument, ki ga človeške oči še niso videle, na katerem je zapisano, kaj naj bi bil dokaz te izjave. Wittgenstein pa bi odgovoril, da četudi je tako, dokaz še ne eksistira, kajti ko odkrijemo ta dokument, se moramo še odločiti, ali ga želimo šteti kot dokaz ali ne. Če je to pravilno, potem je očitno, da odpadejo vsi razlogi za platonistično govorjenje, da dokaz bodisi *obstaja* bodisi *ne obstaja*, da mora biti izjava bodisi resnična bodisi neresnična in tako naprej. Ni pa jasno, da zavračanje platonističnega pojmovanja vključuje dejstvo, da sprejemamo to smer dokazovanja; človek bi utegnil misliti, da potem, ko je bil dokaz enkrat odkrit, nimamo več nobene izbire, razen da mu sledimo, ne da bi dopustili, da je – preden je bil dokaz odkrit – bilo pravilno reči bodisi, da dokaz obstaja, bodisi, da ne obstaja. K temu se bom vrnil kasneje.

Z Wittgensteinovim pojmovanjem se je izjemno težko sprijazniti, čeprav ni jasno, kaj bi mu želeli postaviti nasproti. Dokaz naj bi nas prepričal, napeljal k temu, da imamo tako-in-tako obliko besed za nespodbitno resnično ali da tako-in-tako ob-

[5] II, 46, 48.

liko besed izključimo iz našega jezika. Zdi se, da ni povsem jasno, kako dokaz opravi to izjemno delo. Druga težava je pomanjkanje primerov. Soočeni z dokazom, naravno mislimo, da nimamo nobene druge alternative, kot da ga sprejmemo, če hočemo ostati zvesti razumevanju, ki smo ga že imeli o izrazih, ki jih vsebuje. Za Wittgensteina pa s tem, ko sprejmemo teorem, privzamemo neko novo jezikovno pravilo, in zato naši pojmi na koncu dokaza ne morejo ostati nespremenjeni. Toda dokaz bi lahko zavrnili, ne da bi storili kako večjo silo našim pojmom kot takrat, ko dokaz sprejmemo; tudi če dokaz zavrnemo, bi lahko ostali enako zvesti pojmom, s katerimi smo začeli. To idejo se zdi nenavadno težko vzeti resno, kadar imamo v mislih nek poseben dejanski dokaz. Lahko bi seveda rekli, da je to zato, ker smo dokaz že sprejeli in smo torej naše pojme že podvrgli spremembi, ki jo vključuje sprejetje dokaza; toda težavnost verjetja v Wittgensteinovo pojmovanje zadeve ostaja, tudi ko beremo dokaz nekega teorema, za katerega prej nismo vedeli, enako velika. Hočemo reči, da ne vemo, kako bi bi bilo za nekoga, ki je – po običajnih merilih – že razumel uporabljene pojme, zavrniti ta dokaz. Seveda vemo, da lahko kdo preprosto ne sledi dokazu, toda poznamo tudi zdravilo, da namreč med vsako vrstico dokaza vstavimo preprostejše korake. Primeri, ki so podani v Wittgensteinovi knjigi, so – zanj presenetljivo – mršavi in neprepričljivi. Mislim, da je to precej zanesljivo znamenje, da je z Wittgensteinovo razlago nekaj narobe.

Oglejmo si primer elementarnega seštevanja, na primer “5 + 7 = 12”. Utegnili bi obstajati ljudje, ki štejejo tako kot mi, toda nimajo pojma seštevanja. Če bi taka oseba s štetjem ugotovila, da je v razredu pet dečkov in sedem deklic, potem pa bi jo vprašali, koliko otrok je prisotnih, bi – da bi odkrila odgovor – nadaljevala s štetjem vseh otrok skupaj. Na ta način bi bila ta oseba v enem primeru pripravljena reči, da je pet fantov, sedem deklic in skupaj dvanajst otrok, v drugem primeru pa, da je pet fantov, sedem deklic in vsega skupaj trinajst otrok. Če bi sedaj naleteli na tako osebo, bi morali vedeti, kakšno vrsto argumentov naj navedemo, da bi ji pokazali, da se je v takih okoliščinah v enem primeru morala ušteti, da pet fantov in sedem deklic znese skupaj vedno dvanajst otrok. Če sprejme te argumente, potem je povsem res, da je privzela novo merilo za izrekanje, da je prisotnih dvanajst otrok, in še novo merilo za izrekanje “Morala sem se ušteti”. Prej bi rekla “Uštela sem se” samo takrat, kadar bi opazila, da je, na primer, enega od otrok štela dvakrat. Zdaj bo rekla “Uštela sem se” takrat, kadar ne bi opazila ničesar takega – preprosto na podlagi tega, da je dobila rezultat, da je pet fantov, sedem deklic in trinajst otrok. Toda reči hočemo, da bi bila – celo preden smo jo srečali in jo naučili načel seštevanja – ta oseba, če bi preštela pet dečkov, sedem deklic in trinajst otrok, v zmoti, pa čeprav bi to trdila v skladu z merilom, ki ga je takrat priznavala. To pomeni, da se je morala zmotiti v štetju; in če je naredila napako, potem je morala narediti nekaj, kar bi ji v primeru, da bi to opazila, potem omogočilo, da pokaže, da se je uštela.

Če rečemo, da je – če je preštela pet fantov, sedem deklic in trinajst otrok – potem moralo biti nekaj, kar bi – če bi to opazila – vzela kot merilo za to, da se je

uštela, potem dejstva, da smo jo seznanili s pojmom seštevanja, ne gre preprosto opisati tako, kot da smo jo prepričali, da je privzela novo merilo za to, da se je uštela. Prej gre za to, da je bila napeljana k priznanju, da je s seštevanjem dobila neskladne rezultate kot *simptom* prisotnosti nečesa, kar je že sprejela kot merilo za to, da se je uštela. Učenje seštevanja jo vodi do tega, da reče "Uštela sem se" v okoliščinah, v katerih prej tega ne bi bila rekla. Toda če je – še preden se je tega naučila – v takšnih okoliščinah rekla "Uštela sem se", potem je imela po merilu, ki ga je takrat posedovala, prav. Zato nujnost tega, da se je uštela, kadar dobi s seštevanjem neskladne rezultate, tako rekoč ne dobi svoje celotne veljave od tega, da ta oseba zdaj prizna take rezultate kot merilo za to, da se je uštela.

Če pa po drugi strani rečemo, da je možno prešteti pet fantov, sedem deklic in trinajst otrok, ne da bi obstajalo kaj drugega razen dejstva, da smo dobili takšne rezultate, kar bi, če bi to opazili, vzeli kot podlago za izjavo, da smo se ušteli, potem se zdi, da iz tega sledi, da lahko nekdo naredi napako v štetju (glede na merilo napačnega štetja, ki ga poznamo *mi*), ne da bi naredil kako posebno napako; to pomeni, da ne morem reči, da je potem, če se je nekdo uštel, bodisi dvakrat štel tega fanta bodisi dvakrat štel to deklico bodisi ... Toda to je absurd: ne moreš narediti neke napake, ne da bi obstajala neka posebna napaka, ki si jo naredil. Utegnemo dobiti odgovor, da lahko izberemo, da če je kdo naredil napako, je potem bodisi ..., in da je to dejansko tisto, kar smo izbrali reči. Toda če je disjunkcija resnična, potem mora biti resničen vsaj en njen člen; in če je resnična izjava, potem mora obstajati nekaj takšnega, da lahko – če to opazimo –, to potem štejemo kot merilo resničnosti izjave. Vendar pa je predpostavka, s katero smo pričeli, da nekdo prešteje pet fantov, sedem deklic in trinajst otrok (in reče zato, da se je moral ušteti) in da vseeno ne obstaja nič poleg tega, da je dobil te rezultate, kar bi (če bi za to vedel) štel kot za to, da kaže, da se je uštel; in zato ne more obstajati nič, kar bi, če bi za to vedel, pokazalo resnico kateregakoli od členov disjunkcije "Bodisi je fanta štel dvakrat bodisi … ", in tako dalje. Kdo bi utegnil reči, da če je ta disjunkcija resnična, potem Bog mora vedeti, kateri od členov je resničen; zato ne more biti prav, če za merilo resničnosti disjunkcije štejemo nekaj, česar prisotnost ne zagotavlja eksistence nečesa, kar bi pokazalo resničnost enega izmed posameznih členov. Na primer, napačno bi bilo imeti disjunkcijo [Bodisi, če bi se primerilo, da *P*, potem bi se primerilo, da *Q*, bodisi, če bi se primerilo, da *P*, potem bi se primerilo, da ne *Q*] za logični zakon, ker je povsem možna domneva, da kolikor že vemo o vrsti dejstev, za katera bi morali meniti, da vplivajo na resnico disjunktnih protidejstvenikov, še vedno ne bi poznali ničesar, kar bi lahko šteli za razlog sprejetja bodisi enega bodisi drugega.

Gotovo je del pomena besede "resničen", da mora v primeru, če je neka trditev resnična, obstajati nekaj, zaradi česar je resnična. "Je nekaj, zaradi česar je resnična" pomeni: je nekaj takšnega, da če bi za to vedeli, potem bi to morali imeti za merilo (ali vsaj za podlago) zatrjevanja trditve. Bistvo realizma je v tem: za vsako trditev, ki ima določen pomen, mora biti nekaj, zaradi česar je resnična bodisi ta bodisi njena negacija. (Realizem glede področja matematike imenujemo platoni-

zem.) Intuicionisti sploh ne zanikajo prve teze; po njihovem nekdo upravičeno zatrjuje neko disjunkcijo samo takrat, kadar ima metodo, s katero pride do nečesa, kar bi upravičilo zatrjevanje enega od posameznih členov disjunkcije. Prej zanikajo drugo tezo: nobenega razloga ni, da bi na splošno predpostavljali, da – samo zato, ker ima neka trditev čisto določeno rabo – mora biti nekaj, zaradi česar je bodisi resnična bodisi neresnična. Paziti je treba, da ne rečemo, da so logične resnice izjema, da ne obstaja nič, zaradi česar so resnične; nasprotno, za realiste smo upravičeni trditi [*P* ali ne *P*], ker mora obstajati nekaj, zaradi česar je bodisi *P* bodisi [ne *P*] resnično, in zato mora v vsakem primeru obstajati nekaj, zaradi česar je [*P* ali ne *P*] resnično.

Zdi se, da je v tem ena od velikih razlik med Wittgensteinom in intuicionisti. Tako se zdi, da je po njegovem to, da imamo katerokoli izjavo, ki smo jo pač izbrali, za nujno veljavno, naša odločitev, če smo se pač tako odločili.[6] Zdi se, da za tem stoji ideja, da z odločitvijo, da je nekaj treba imeti za nujno veljavno, tako deloma določimo pomen besed, ki jih to vsebuje; ker imamo pravico besedam, ki jih uporabljamo, pripisati pomen, ki ga izberemo, imamo pravico, da določimo kot nujno vsako izjavo, ki jo izberemo, da jo bomo imeli za tako. Proti temu bi lahko kdo rekel, da so pomeni besed v izjavi lahko že popolnoma določeni, tako da ni nobenega prostora za nadaljnje določitve. Če kdo tako vzame klasično (realistično) pojmovanje, sestoji splošna oblika razlage pomena neke izjave iz določitve njenih resničnostnih pogojev (to je pojmovanje iz Wittgensteinovega *Traktata* in tudi pojmovanje Fregeja). Na ta način mora biti pomen stavčnih operatorjev razložen s pomočjo resničnostnih tabel; sklicevanje na resničnostne tabele nas upravičuje, da jemljemo določene oblike kot logično resnične.

Ker intuicionisti zavračajo pojmovanje, po katerem mora za vsako izjavo obstajati nekaj, zaradi česar je bodisi resnična bodisi neresnična (in ne dopuščajo, da bi stanje izboljšali z vpeljavo nadaljnjih resničnostnih vrednosti), je zanje temeljna oblika pojasnitve pomena izjave v določanju merila, pod katerim prepoznavamo kot upravičeno zatrjevanje izjave (v matematiki je to na splošno posedovanje dokaza). Na ta način določimo pomen stavčnih operatorjev, pomen, na primer, operatorja “ali”, z razlago merila za zatrjevanje sestavljene izjave v okviru merila za zatrjevanje sestavnih delov; zato smo, grobo rečeno, upravičeni v zatrjevanju [*P* ali *Q*] samo takrat, kadar smo upravičeni bodisi v zatrjevanju *P* bodisi v zatrjevanju *Q*. Logični zakoni veljajo zaradi teh razlag; s sklicevanjem nanje vidimo, da bomo *vedno* upravičeni zatrjevati izjave z določeno obliko.

Wittgensteinova precej drugačna ideja, da imamo pravico preprosto *določiti*, da je treba trditev izjave z dano formo imeti vedno za upravičeno, ne da bi upoštevali rabo, ki je že bila dana besedam, vsebovanim v izjavi, se mi zdi napačna. Če bi imel Wittgenstein prav, potem bi bila po mojem mnenju komunikacija vseskozi v nevarnosti, da bi se preprosto podrla. Odločitev, da štejemo izjave neke posebne oblike za logično resnične, ne zadeva samo pomena izjave te oblike; pomeni vseh

[6] *Primerjaj* V, 23, zadnji odstavek na str. 179.

vrst drugih izjav bodo prizadeti, in sicer tako, da ne bomo zmožni podati neposredne pojasnitve le-teh, ne da bi se sklicevali na to, da jemljemo zadevne oblike izjav kot logične resnične. Na ta način bo postalo nemogoče dati razlago pomena katerekoli izjave, ne da bi dali razlago pomena vsake izjave, in ker je za jezik bistveno, da razumemo *nove* izjave, to pomeni, da sploh ne bo mogoče dati razlago rabe našega jezika. Če navedem primer: predpostavimo, da je nekdo izbral protidejstveno disjunkcijo, ki sem jo omenil zgoraj, za logični zakon. Njegovi trditvi, da je ta logično veljavna, skušamo ugovarjati z ugotovitvijo, da mora bodisi priznati, da je disjunkcija lahko resnična, kadar ni resničen noben člen, bodisi da je protidejstvenik lahko resničen, kadar ni ničesar, zaradi česar bi bil resničen, to je nič takega, kar bi, če bi za to vedeli, imeli za podlago za zatrjevanje protidejstvenika. Vendar pa lahko odgovori z zanikanjem, da sledijo te posledice; kot posledico veljavnosti zakona raje navaja, da mora obstajati nekaj takšnega, da bi, če bi za to vedeli, to šteli za podlago bodisi za zatrjevanje [Če bi se primerilo, da *P*, potem bi se primerilo, da *Q*] bodisi za zatrjevanje [Če bi se primerilo, da *P*, potem bi se primerilo, da ne *Q*]. Rekel bo, na primer, da mora obstajati nekaj, iz česar sestoji bodisi hrabrost bodisi strahopetnost moža, čeprav ta možak ni nikoli okusil nevarnosti in ni zato nikoli imel priložnosti, da bi izkazal bodisi hrabrost bodisi strahopetnost. Če sprejmemo, da ima lahko upravičeno karkoli za logični zakon, ker je pač tako izbral, potem mu ne moremo zanikati pravice do tega sklepa. Sklep izhaja iz disjunkcije protidejstvenikov, ki jih je izbral, da bi jih predvsem imel za logično resnične skupaj z izjavami, ki bi jih vsi morali imeti za logično resnične. V vsakem primeru pa mora imeti pravico, da ima sam sklep za logično resničen, če tako izbere. Tako bo sklenil, da mora možak bodisi v svojem obnašanju razkrivati, kako bi se vedel v vseh možnih okoliščinah, bodisi da je v njem neka vrsta duševnega mehanizma, ki določa, kako se vede v vsaki situaciji.

Iz ostale Wittgensteinove filozofije zdaj lahko vemo, kako odbijajoč bi bil zanj tak sklep; toda kakšno pravico bi imel – po svojem lastnem pojmovanju stvari – oporekati temu možaku, da je prišel do tega sklepa? Vse je v redu, če rečemo "Potem ko veš, kakšna so dejstva, lahko rečeš, kar hočeš": kako naj bomo gotovi, da lahko komurkoli povemo, kakšna so dejstva, če je mogoče, da ima oblika besed, ki jih uporabljamo, da mu povemo dejstva, zanj drug pomen kot rezultat tega, da je sprejel logični zakon, ki ga mi ne sprejemamo? Lahko rečemo, da moramo potem, ko odkrijemo to različnost v razumevanju določene oblike besed, izbrati neko drugo obliko besed, ki jo razume kakor mi in ki izraža, kar hočemo reči. Toda, kako naj vemo, da obstaja oblika besed, ki opravi to dejanje? Če ga vprašamo, kako razume neko izjavo, in nam da enako razlago, kot bi jo dali mi, to še ne zagotavlja, da jo dejansko razume tako kot mi. Samo zaradi dejstva, ker prepozna kot logično resnične določene oblike, ki jih mi ne, je zmožen zgraditi argumente, ki vodijo k dani izjavi kot sklepu, s premisami, ki jih sprejemamo tudi mi, čeprav ne sprejemamo argumenta; to je, imel se bo za pristojnega zatrjevati izjave v okoliščinah, v katerih se mi ne bi imeli pristojne za to. (*Ne* čisto vzporedna analogija je tale: zamislimo si lahko klasika in intuicionista, ki podajata razlagi

pomena eksistenčnega kvantifikatorja, razlagi, ki zvenita povsem enako. Navzlic temu bo klasik izrekal eksistenčne trditve v primerih, kjer jih intuicionist ne bo, ker je sposoben priti do njih preko argumentov, ki jih intuicionist ne bo sprejel.) V primeru, ki si ga zamišljamo, je zdaj bistveno predpostaviti, da naš možak ni sposoben dati nobene splošne vrste razlage besed, ki jih uporablja, tako da lahko iz te pojasnitve neposredno izpeljemo pomen, ki ga pripisuje vsakemu stavku, sestavljenemu iz teh besed. Kajti če bi lahko dal takšno razlago, potem bi iz te razlage lahko videli, zakaj *je* logični zakon, ki ga sprejema, mi pa ne, nujen, če so besede v njem razumljene, kot jih razume on. Na ta način bi bili upravičeni jemati izjave takšne oblike za logične zakone vzporedne z upravičenjem zakonov klasične logike v okviru pojasnitve pomena s sklicevanjem na resničnostne pogoje in z upravičenjem intuicionistične logike v okviru pojasnitve s sklicevanjem na pogoje zatrjevanja. Toda vsa poanta primera je bila, da je bil to primer enostavnega določanja nekaterih oblik izjav kot logično pravilnih brez zahteve po tovrstnem upravičevanju.

To Wittgensteinovo stališče do logične nujnosti lahko delno pojasni njegovo ambivalenco glede zakona o izključeni tretji možnosti v matematiki. Če filozof vztraja na zakonu o izključeni tretji možnosti, je to verjetno izraz realističnega (platonističnega) pojmovanja matematike, ki ga Wittgenstein zavrača: vztraja, da je [*P* ali ne *P*] resnično, ker misli, da je splošna oblika razlage pomena ugotavljanje resničnostnih pogojev in da mora obstajati za vsako matematično izjavo, ki ima določen pomen, nekaj, zaradi česar je bodisi resnična bodisi neresnična. Po drugi strani, če želi matematik uporabiti obliko argumenta, odvisno od zakona o izključeni tretji možnosti (npr., [Če *P*, potem *Q*]; [Če ne *P*, potem *Q*]; torej *Q*), potem Wittgenstein ne bo ugovarjal, ker ima matematik pravico imeti oblike besed [*P* ali ne *P*] za nujno veljavne, če tako izbere.

Če se vrnemo k primeru ljudi, ki so šteli, pa niso poznali seštevanja, se zdi verjetno, da bi nekdo, ki je sprejel Wittgensteinovo gledišče, želel zavrniti alternativo: kadar je eden od teh ljudi preštel pet fantov, sedem deklic in trinajst otrok, je bodisi moralo obstajati nekaj, kar bi mu bilo, če bi to opazil, dokazno gradivo za to, da se je uštel, bodisi bi lahko preštel pet fantov, sedem deklic in trinajst otrok, kadar ne bi obstajalo nič, kar bi mu lahko pokazalo, da se je uštel. To bi zavrnil na podlagi nejasnosti, ali je alternativa postavljena v *našem* jeziku ali v jeziku ljudi, o katerih je govor. *Mi* pravimo, da se je moral ušteti in je moral zato bodisi šteti dvakrat tega fanta bodisi ... in zato je obstajalo nekaj, kar bi mu pokazalo, če bi to opazil, da se je uštel, to pa pravimo samo na podlagi tega, da se njegove številke ne seštejejo. Toda on bi ne imel razloga, da bi to rekel, in bi trdil, da je verjetno štel pravilno. Zdaj ne smemo vprašati, ali je *resnično* to, kar pravimo mi, ali tisto, kar pravi on, kot da lahko stojimo zunaj obeh govoric; mi to samo *pravimo*, to je, njegove dobljene neskladne rezultate štejemo kot merilo za izrekanje tega, on pa ne. Proti temu bi iz razlogov, ki sem jih navedel, rad uveljavil konvencionalno pojmovanje, da imamo pri tem, da se odločimo, da neko obliko besed štejemo kot nujno ali pa da štejemo tako-in-tako kot merilo za izjavljanje določene vrste, od-

govornost do pomena, ki smo ga že dali besedam, iz katerih je izjava sestavljena.

Iz tega se lepo vidi, zakaj je Wittgenstein v tej knjigi tako obseden z empiristično filozofijo matematike. Noče sprejeti empiristične razlage, čeprav ga ta zelo privlači. Spet in spet se vrača k vprašanju: "V čem je razlika med računanjem in eksperimentom?" Dejstvo je, da celo če se odločimo *reči*, da smo morali narediti napako pri štetju, ko smo našteli pet fantov, sedem deklet in trinajst otrok, naša odločitev, da obravnavamo ta rezultat kot merilo za to, da smo se ušteli, ne more sama po sebi narediti za verjetno, da bi bili v takšnih okoliščinah sposobni odkriti napako; to je, če je Wittgensteinovo razlaga zadev pravilna. Kakorkoli že, takšna diskrepanca v štetju je v praksi zelo zanesljivo znamenje, da bomo zmogli najti napako ali da bomo v primeru ponovnega štetja dobili rezultate, ki se skladajo. Ravno zato, ker je ta tako zanesljivo znamenje v praksi, je za nas možno – ali koristno – postaviti "5 + 7 = 12" v arhiv. Na ta način po Wittgensteinu leži za matematičnim zakonom neka empirična regularnost.[7] Matematični zakon ne *trdi*, da obstaja regularnost, ker ga ne obravnavamo tako, kot obravnavamo trditev o empiričnem dejstvu, ampak kot neko nujno izjavo; vseeno pa je to, kar nas napeljuje, da ga obravnavamo tako, določena empirična regularnost, saj je zakon mogoče koristno uporabiti samo zato, ker obstaja regularnost.[8] Kakšna je relacija med regularnostjo in dokazom, ki nas napeljuje na to, da zakon arhiviramo, Wittgenstein ne uspeva razložiti.

Da bi se izognili nesporazumu, moram poudariti, da ne predlagam neke alternativne razlage nujnosti matematičnih teoremov in da ne vem, kakšna naj bi takšna razlaga bila. Poskušal sem zgolj podati razloge za naravni odpor, ki ga občutimo ob Wittgensteinovi razlagi, razloge za razmišljanje o tem, da mora biti napačna. Verjamem pa, da ne glede na to, ali sprejemamo Wittgensteinovo razlago ali pa jo zavračamo, po razmišljanju o njej ne moremo biti več zadovoljni s standardnim pojmovanjem, ki sem ga poimenoval spremenjeni konvencionalizem.

Wittgensteinov konstruktivizem je veliko bolj skrajen kakor pri intuicionistih. Lahko rečemo, da je za intuicioniste vsako naravno število bodisi praštevilo bodisi sestavljeno, kajti za vsako naravno število imamo metodo za odločanje, ali je sestavljeno ali praštevilo. Wittgenstein bi zanikal, da imamo takšno metodo. Običajno bi rekli, da je bilo Eratostenovo sito takšna metoda; toda za velika števila ga ne bi – ne bi *mogli* – uporabili, temveč bi se morali zateči h kakšnemu močnejšemu merilu. Lahko bi rekli, da je zaradi relativne kratkosti naših življenj to bolj praktična kot teoretična zadeva. Toda ko bi nek fanatik posvetil vse svoje življenje računanju – s pomočjo sita – praštevilčnosti nekega zelo velikega števila, za katero je z močnejšo metodo dokazano, da je res praštevilo, in bi prišel do sklepa, da je sestavljeno, ne bi opustili našega dokaza, marveč bi rekli, da mora biti v njegovih izračunih neka napaka. To kaže, da jemljemo za *merilo* praštevilčnosti "naprednejše" preverjanje, ne pa sita: kadar presojamo izračune, vzamemo kot merilo teorem in ne obratno. Računanje je za nas neuporabno, ker je *nepregledno*. Nek

[7] III, 44.
[8] Na primer II, 73, 75.

matematični dokaz, katerega izračuni so poseben primer, je dokaz zato, ker ga uporabljamo za to, da rabi nekemu namenu; namreč, sklep ali rezultat postavimo v arhiv, *tj*., obravnavamo ju kot nespodbitna in ju uporabljamo kot standard, s katerim presojamo druge rezultate. Zdaj nekaj ne more služiti temu namenu, in zato ni matematični dokaz, razen če smo sposobni izključiti možnost, da so se v njem pripetile napake. Dokaz moramo biti zmožni "sprejeti", to pa pomeni, da moramo biti gotovi, da smo sposobni reproducirati *isti* dokaz. Na splošno ne moremo *zagotoviti*, da bomo zmožni ponoviti eksperiment in dobiti isti rezultat kot prej. Če dobimo domnevno drugačen rezultat, bomo iskali neko ustrezno razliko v pogojih eksperimenta; toda vnaprej nimamo jasne ideje, kaj naj bi šteli za ustrezno razliko. (Ni povsem jasno, ali Wittgenstein, ko pravi, da moramo biti sposobni reproducirati dokaz, misli, da moramo biti sposobni kopirati zapisan dokaz, ki ga imamo pred sabo, in biti gotovi, da smo ga prepisali brez napake, ali da moramo biti zmožni dokaz prebrati in ga razumeti tako, da bi ga lahko zapisali brez sklicevanja na originalno zapisan dokaz, tako da postane možnost napačnega zapisa bolj ali manj irelevantna. Zdi se, da argument ni odvisen od tega, katero interpretacijo sprejmemo.)

Tako računanje praštevilčnosti nekega zelo velikega števila, ki je z drugimi sredstvi dokazano praštevilo, s pomočjo Eratostenovega sita ne bi bilo matematični dokaz, marveč eksperiment, da bi videli, ali kdo lahko opravi tako neznansko računanje pravilno; kajti računanje bi bilo v smislu, kot sem ga razložil, nepregledno. Kaj zdaj pomeni beseda "praštevilo", uporabljena na velikih številih, pokažemo s tem, kar smo sprejeli kot *merilo* praštevilčnosti, kar smo vzeli kot standard, s katerim ocenjujemo trditve, da je neko število praštevilo ali sestavljeno. Pomen besede "praštevilo" tako ni enkrat za vselej dan z Eratostenovim sitom. Zato nimamo pravice trditi, da je neko število bodisi praštevilo bodisi sestavljeno, ker bo za katerokoli merilo, ki ga lahko sprejmemo, obstajalo tako veliko število, da aplikacija tega merila na to število ne bo pregledna. To osvetljuje Wittgensteinovo vztrajanje, da je pomen neke matematične izjave določen z njenim dokazom (ali ovrženjem)[9], da odkritje dokaza spremeni pojem. Nagnjeni smo misliti, da je izjava kot "Obstaja liho popolno število" določena vnaprej povsem določno in da naše odkritje dokaza ali ovrženja ne more spremeniti tega že določenega pomena. To mislimo zato, ker imamo metodo, s katero lahko za *katerokoli* število določimo, da je bodisi liho ali ne, bodisi popolno ali ne. Toda predpostavimo, da naj bi bila takšna trditev dokazana, na primer s pokazom nekega posebnega lihega popolnega števila. To število bi moralo biti zelo veliko in nezamisljivo je, da bi ga lahko kot popolnega dokazovali s preprosto metodo računanja njegovih faktorjev s pomočjo sita in njihovim seštevanjem. Dokaz bi bil verjetno uspešen, če bi ponudili novo metodo za dokazovanje popolnosti in jo potem sprejeli kot naše *merilo* za izjavljanje, ali so števila tega ranga popolna ali niso. Tako določa dokaz za števila te velikosti, kakšen naj bo *pomen* predikata "popoln".

Ta konstruktivizem, bolj strog od vseh doslej predlaganih, je Kreisel poimenoval

[9] Toda *glej*, na primer, V, 7.

"striktni finitizem", Hao Wang pa "antropologizem". V delu "Sur le platonisme dans les mathématiques"[10] ga je nakazal Bernays. Kakor ga je predstavil on, gre bolj za koncentracijo na praktično kot na teoretično možnost. Poskusil sem razložiti, kako to za Wittgensteina ni pravilen način razlikovanja.

Nekoliko težko je ugotoviti, kako bi bila videti naša matematika, ko bi privzeli to "antropologistično" stališče. Ali bi Péanovi aksiomi preživeli nespremenjeni? "Vsako število ima naslednika" bi v tej matematiki pomenilo, da če je število dostopno (to je, če imamo zapis, v katerem je lahko pregledno predstavljeno), je dostopen tudi naslednik, to pa se sprva zdi razumno. Po drugi strani pa se zdi, da pelje k sklepu, da je dostopno *vsako* število, jasno pa je, da bodo ne glede na zapis obstajala števila, za katera ne bo preglednega simbola v tem zapisu. Problem je podoben grškemu problemu kupa: če imam nekaj, kar ni kup peska, ga ne morem spremeniti v kup tako, da dodam eno zrno peska več. Težavo bi lahko rešili z naslednjo argumentacijo. Recimo, da "pridemo" do števila takrat, kadar dejansko zanj zapišemo njegov pregledni simbol. Potem lahko rečemo: če pridem do števila, potem lahko pridem tudi do njegovega naslednika. Iz tega sledi, da – če *lahko* pridemo do nekega števila – je potem možno, da lahko pridemo tudi do njegovega naslednika; to je, če je število dostopno, potem je možno, da je tudi njegov naslednik dostopen. Razen če ne mislimo, da "možno možni *p*" implicira "možni *p*", potem ne sledi, da – če je neko število dostopno – je dostopen tudi njegov naslednik. Tako moramo privzeti modalno logiko kot S_2 ali M, ki ne vsebujeta zakona (v poljskem zapisu) "*CMMpMp*". Drug razmislek, ki meri v isto smer, je naslednji. "Pregleden", "dostopen" itn. so *nejasni* pojmi. Pogosto se splača zamenjati nejasen pojem z drugim natančnim, toda to bi bilo tu povsem neumestno; nočemo določiti nekega določenega števila kot zadnjega dostopnega števila, vsa večja števila pa naj bi bila definitivno nedostopna. Nejasnost nejasnega predikata je zdaj neizkorenljiva. Tako je "hrib" nejasen predikat, ker ni jasne razmejitve med hribi in gorami. Toda te nejasnosti ne moremo odpraviti z vpeljavo novega predikata, na primer, "vzpetine", ki bi ga aplicirali na stvari, ki niso docela niti hribi niti gore, kajti še vedno bi ostale stvari, ki ne bi bile docela niti hribi niti vzpetine, in tako *ad infinitum*. Zato – če iščemo logično teorijo, ki je primerna za stavke, ki vsebujejo nejasne predikate – bi bilo naravno izbrati modalno logiko, kakršna je S_2 ali M, z neskončno veliko modalitetami (ob interpretaciji nujnostnega operatorja s pomenom "definitivno"). Na ta način bi bila sugestija za propozicijski račun, primeren antropologistični matematiki, ta, da je z modalnim sistemom M v enakem odnosu, kot je intuicionistični propozicijski račun s S_4. (Ta sistem bi verjetno moral imeti aksiome, ki so po obliki podobni tistim, ki jih je izvirno podal Heyting. Namreč: ti aksiomi bi pogosto bili implikacije, katerih antecedens je konjunkcija, sistem pa bi imel kot primitivno pravilo pravilo priključitve konjunkcije; kajti, kakor me je opozoril E. J. Lemmon, po Tarskega ali Gödelovem prevodu implikacije, katere konsekvens vsebuje implikacijo, ki se ponavlja bolj pogosto kot v antecedensu, navadno ni mogoče uspešno prevesti v veljavno formulo siste-

[10] *L'enseignement math?matique*, XXXIV (1935), 52-69.

ma *M* natanko zato, ker v *M* nimamo zakona "*CLpLLp*".) Drug predlog, ki ga je dal dr. Wang, je, da bi se antropologistična logika ujemala z intuicionistično, teorija števil pa bi bila šibkejša.

Wittgenstein uporablja te ideje, da bi podvrgel dvomu pomembnost, ki so jo nekateri filozofi pripisovali redukcionističnim programom Fregeja in Russella. Utegnemo misliti, da je bil pravi pomen in upravičenje za enačbo, kakršna je "5 + 7 = 12", dosežen, če jo interpretiramo kot trditev v teoriji množic ali v predikatnem računu višjega reda; toda dejstvo je, da bi ne bil samo dokaz, ampak tudi izjava propozicije v osnovnem zapisu teh teorij tako neznansko dolga, da bi bila povsem nepregledna. Lahko bi odgovorili, da z uporabo določenih simbolov lahko skrajšamo tako dokaz kot izjavo; toda potem imajo bistveno vlogo definicije, pri čemer so definicije za Russella *zgolj* okrajšave, tako da sta pravi formalni dokaz in prava formalna izjava v osnovnem zapisu. Zapis za Wittgensteina ni zgolj zunanje pregrinjalo misli, ki so same na sebi do privzetega zapisa ravnodušne. Dokaz v osnovnem zapisu ni tisto, kar nas "zares" upravičuje v zatrjevanju "5 + 7 = 12", kajti tega dokaza nikoli ne zapišemo; ko bi ga bil kdo zapisal in dobil rezultat "5 + 7 = 11", bi morali – sklicujoč se na šolsko seštevanje kot standard – reči, da je moral narediti napako; dokaza niti ne zapišemo z določenimi simboli; tisto, kar bi, če sploh kaj, lahko imenovali upravičenje enačbe "5 + 7 = 12", bi bil dokaz, da dejansko izpeljemo, da bi vsako vsoto "lahko" formulirali in dokazali v našem formalnem logičnem sistemu, ta dokaz pa uporablja metode, ki so mnogo močnejše od pravil za običajno šolsko seštevanje.

Zdaj se vračam k nasprotujočim *slikam*, ki jih uporabljajo platonisti in konstruktivisti – k sliki našega odkrivanja v že obstoječi matematični realnosti in k sliki našega sprotnega konstruiranja matematike. Ljudje včasih – vključno z intuicionisti – dokazujejo, kakor da je pomembno najprej odločiti, katera od teh slik je pravilna, in potem iz te odločitve potegniti sklepe. Toda jasno je, da sta to le sliki, to je, da mora spor o pravilnosti najti svojo podlago drugje – taka razprava se mora biti sposobna izraziti brez sklicevanja na ti dve sliki. Po drugi strani pa imajo takšne slike ogromen vpliv na nas, želja, da bi ustvarili primerno sliko, pa je skoraj neubranljiva. Če kdo ne verjame v veljavnost matematične resnice, potem ne more sprejeti platonistične slike. Wittgensteinov glavni razlog za zavračanje objektivnosti matematične resnice je njegovo zavračanje objektivnosti *dokaza* v matematiki, njegova ideja, da dokaz ne *vsiljuje* sprejetja; temu pojmovanju pa očitno ustreza slika našega sprotnega konstruiranja matematike. Predpostavimo zdaj, da se nekdo ne strinja z Wittgensteinom in misli, da je dober dokaz natanko tisti, ki se nam vsiljuje sam po sebi, ne samo v smislu, da imamo, ko enkrat sprejmemo dokaz, njegovo zavračanje za merilo nerazumevanja terminov, v katerih je izražen, temveč v smislu, da je lahko postavljen v takšno obliko, da ga ne more zavrniti nihče, ne da bi rekel nekaj, kar bi lahko bilo prepoznano, preden je bil dan dokaz, kot vračanje na to, s čimer se je prej že strinjal. Ali je taka oseba prisiljena sprejeti platonistično sliko matematike? Seveda ne; objektivnost matematičnega dokaza lahko sprejme, ne da bi tudi verjela v objektivnost matematične resnice. Intuicio-

nisti, na primer, pogosto govorijo, kakor da verjamejo v prvo, ne da bi verjeli v zadnje. Res je, da npr. A. Heyting piše: "Kakor pomen neke besede ne more biti nikoli dovolj natančno določen, da bi izključili vsakršno možnost nesporazuma, tako tudi mi ne moremo biti nikoli matematično gotovi, da formalni sistemi pravilno izražajo naše matematične misli."[11] Toda intuicionisti se nagibajo k temu, da pišejo, kakor da smo – medtem ko ne moremo vnaprej razmejiti področja vseh možnih intuicionistično veljavnih dokazov – lahko glede posameznih dokazov in posameznih izpovedanih načel dokaza gotovi, da so intuicionistično pravilni. To zadeva tisto, kar je Wittgenstein imenoval pestrost matematike. Vprašanje, ali je določena izjava dokazljiva, ne more biti postavljeno v matematično končni formulaciji, ker ne moremo vnaprej predvideti vseh možnih oblik argumenta, ki bi jih utegnili uporabiti v matematiki. Vseeno domnevam, da lahko kdo zanika celo to, v smislu, da bi za nek poseben logični okvir trdil, da je vsak teorem, ki je lahko dokazan intuicionistično, lahko dokazan tudi znotraj tega okvira (čeprav danega dokaza morda ni mogoče reproducirati znotraj le-tega), kljub temu pa v bistvu ostane intuicionist. Za najmočnejše intuicionistične argumente se zdi, da so povsem neodvisni od vprašanja objektivnosti matematičnega dokaza – ali dokaz, ko je enkrat dan, vsiljuje sprejetje, in ali je pojem veljavnega dokaza mogoče precizirati. Najmočnejši argumenti prihajajo iz vztrajanja na tem, da splošna oblika razlage pomena in zato še posebej razlaga logičnih operatorjev ni trditev o resničnostnih pogojih, marveč o pogojih zatrjevanja. Pomena logičnih operatorjev smo se naučili z *urjenjem* njihove rabe, kar pomeni, da smo naučeni, da v določeni vrsti situacije zatrjujemo sestavljene izjave. Iz tega urjenja tako rekoč ne moremo potegniti več, kot pa je bilo vanj dano, in, razen če se ne ukvarjamo z razredom odločljivih izjav, pojma resnice in neresnice ne moreta dati opisa urjenja, ki smo ga bili deležni. Zato neko splošno pojmovanje pomena, ki bistveno uporablja pojma resnice in neresnice (ali katerokoli drugo število resničnostnih vrednosti), ni prava oblika za pojasnitev pomena.

Jasno je, da razmišljanja te vrste nimajo nič opraviti z matematiko posebej, temveč gre za povsem splošne aplikacije. Prav tako imajo tesno zvezo z Wittgensteinovim naukom, da je pomen raba. Mislim, da *Raziskave* implicitno vsebujejo zavračanje klasičnega (realističnega) Fregejevega pojmovanja in pojmovanja iz *Traktata*, da je splošna oblika pojasnitve pomena trditev o resničnostnih pogojih.[12] To ponuja razlog za Wittgensteinovo in intuicionistično zavračanje platonistične slike, ki je povsem neodvisen od kateregakoli razmišljanja o neobjektivnem značaju matematičnega dokaza in pestrosti matematike. Po drugi strani pa ni jasno, da bi bil nekdo, ki je, kakor sem ga opisal, sprejel razmišljanja o pomenu, toda zavrnil razmišljanja o dokazu, zadovoljen z običajno konstruktivistično podobo našega izmišljanja matematike. Navsezadnje se razmišljanja o pomenu ne nanašajo le na matematiko, temveč na vse diskurze; in medtem ko zanesljivo kažejo nekatere napake v realističnem pojmovanju o mišljenju in realnosti, zagotovo zunaj matematike ne implicirajo skrajnosti subjektivnega idealizma – da mi *ustvarjamo*

[11] *Intuitionism, Uvod* (Amsterdam, 1956), str. 4.
[12] *Glej* tudi *Opazke* I, Dodatek I, 6.

svet. Zdi pa se, da moramo kot odgovor na naše raziskovanje med platonistično in konstruktivistično vriniti posredujočo sliko – denimo predmetov, ki vznikajo v bivanje. Mi ne *delamo* predmetov, ampak jih moramo sprejeti takšne, kakršne najdemo (to ustreza dokazu, ki se nam vsiljuje sam po sebi). Toda ti predmeti niso bili tu že prej, da bi bile lahko – še preden smo izvedli raziskave, ki so jih prinesle v bivanje – naše izjave o njih resnične ali neresnične. (To naj bi bila seveda samo slika. Njena poanta pa je prelomiti s tistim, kar se mi zdi lažna dihotomija med platonistično in konstruktivistično sliko, ki skrivoma prevladuje v našem razmišljanju o filozofiji matematike.)