ANαliZA

časopis za kritično misel

Letnik 3, številka 3-4, junij 2000 · ISSN 1408-2969

RAZPRAVE

Miklavž Vospernik

O realnosti števil

Pedagoška fakulteta Univerze v Mariboru

Citiranje: Miklavž Vospernik, »O realnosti števil«, *Analiza: časopis za kritično misel* 3, št. 3-4 (1999): 48–58.

To delo je objavljeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva 4.0 Mednarodna (CC BY 4.0), https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.sl.

Izdajatelj: Društvo za analitično filozofijo in filozofijo znanosti, Ljubljana.

Elektronska različica je bila leta 2026 rekonstruirana iz izvirnih stavnih datotek in preverjena s tiskano izdajo. Številke strani ustrezajo tiskani izdaji; prelomi strani znotraj prispevka se lahko nekoliko razlikujejo.

Miklavž Vospernik
Pedagoška fakulteta Univerze v Mariboru

O REALNOSTI ŠTEVIL

V pričujočem članku se bomo posvetili Bigelowovemu fizikalističnemu pristopu k matematiki, ki temelji na realizmu števil. Pokazali bomo, kje so njegovi glavni problemi: osredotočili se bomo na težave pri vpeljavi neskončnih števil, poleg tega pa bomo pokazali, da je Bigelowova metodologija omejena tudi pri nekaterih transcendentalnih realnih številih, kot so recimo *e* in mnogi logaritmi.
Ključne besede: filozofija matematike, ontologija števil, fizikalizem, Bigelow.

1. Uvod

Sodobni fizikalistični pristop k matematiki pozna vsaj dve različici. Prva različica je realizem glede teorije množic, kakor ga zagovarja Penelope Maddy (1990). Opira se na naturalizirano epistemologijo. (Maddy trdi, da lahko množice zaznavamo, to pa v veliki meri utemeljuje z odkritji nevropsihologije.) Toda ta različica nas tukaj ne bo zanimala. Druga različica je predstavljena v knjigi *Realnost števil* [*The Reality of Numbers*] Johna Bigelowa (1988). Osnovana je na realizmu števil. Moj članek se bo osredotočil na probleme, ki jo zadevajo.

Tudi če načeloma obstajajo dobri razlogi za to, da bi lahko verjeli v fizikalistični pristop k matematiki na splošno, menim, da je veliko težje verjeti, da bi bil takšen pristop osnovan na realizmu *vseh* števil. V pričujočem članku bomo pretehtali splošne težave Bigelowovega pristopa in dokazali, da, sledeč njegovi metodologiji, naletimo na precejšnje ovire že, ko gre za neskončna števila. Poleg tega pa nekatera transcendentalna števila, kot so *e* in mnogi logaritmi, ne morejo obstajati v fizikalnem prostoru-času kot dolžine v Bigelowovem smislu.

2. Benecerrafov izziv – kaj bi števila lahko bila

Fizikalizem v matematiki na splošno, posebej pa Bigelowova različica, dolgujeta marsikaj nekaterim osnovnim izzivom, s katerimi se mora soočiti vsakdo, če hoče razložiti, kaj matematični objekti so in kako lahko kaj vemo o njih. Te izzive je prvi predstavil Paul Benacerraf (Benacerraf, 1965: 1973).

V prvem članku (Benacerraf, 1965) je Benacerraf proučeval, kaj so (naravna) števila. Naravna števila lahko definiramo na različne načine. Frege, na primer, je na-

ravna števila izenačil z vrsto ekvivalenčnih razredov razredov iste velikosti. Drug primer je Zermelova definicija števil kot vrste:

∅, {∅}, {{∅}}, {{{∅}}}, ...

Poleg teh dveh obstaja še von Neumannova definicija, ki pravi, da naravna števila lahko definiramo kot vrsto:

∅, {∅}, {∅, {∅}}, {∅, {∅}, {{∅}}}, ...

Omenjene definicije se razlikujejo med seboj po tem, koliko članov tvori določeno število. Fregejev kandidat za naravno število *n* ima toliko članov, kot je *n*-članskih razredov, medtem ko se Zermelo zadovolji samo z enim članom, von Neumann pa zahteva *n* članov za naravno število *n*. Zastavimo si torej lahko vprašanje, kateri izmed kandidatov za števila je pravi.

Benacerraf je pokazal, da ni matematičnih razlogov, ki bi lahko razlikovali med vsemi temi kandidati in tako načeloma odločili v prid najprimernejšega. A kar je huje, zaradi istega razloga ne moremo izbrati *nobenega določenega* neskončnega zaporedja množic, kakor tudi ne zaporedja objektov kot števil. Lahko sklenemo, da ni načina, kako bi določili, ali so števila te ali kakšne druge množice ti ali kakšni drugi objekti. Toda Benacerraf je dokazal tudi, da če bi bila števila množice, bi morala biti *neke določene množice* (Benacerraf, 1965: 62), podobno pa velja za objekte – namreč, če bi števila bila objekti, bi morala biti *neki določeni objekti* (Benacerraf, 1965: 69). Zato lahko zaključimo, da števila niso ne objekti ne množice. Toda kjub temu imajo vsa omenjena zaporedja vendar nekaj skupnega – vsa predpostavljajo, da obstaja prvi element, so diskretna in nimajo zadnjega elementa. Na kratko, vsem je skupna njihova struktura. Lahko torej rečemo, da dokazi prvega Benacerrafovega članka napeljujejo na matematični strukturalizem.

Njegov drug članek (Benacerraf, 1973) se osredotoča na dejstvo, da o matematičnih bitnostih ponavadi govorimo kot o neodvisnih od našega uma, ali celo abstraktnih in idealnih. Takšen pristop ponavadi imenujemo platonizem ali platonski realizem. Toda če res privzamemo, da vse matematične bitnosti obstajajo v "platonskih nebesih" (in z njimi števila) in s tem navidezno rešimo problem njihovega obstoja, se odpovemo vsakršnim sredstvom, ki bi nam omogočala védenje o njih. Namreč, če so matematične bitnosti resnično abstraktne in idealne, tedaj ne moremo računati na kakršnokoli vzročno interakcijo z njimi. Toda najboljše teorije védenja, kar jih imamo, so prav vzročne. Če sledimo platonskemu realizmu v matematiki, si torej moramo postaviti vprašanje: kako je matematično védenje sploh možno? Na kratko povzeto, je torej glavna Benacerrafova dilema v njegovem drugem članku, kako spraviti ontološka vprašanja o matematičnih bitnostih z epistemološkimi.

Bigelowov fizikalistični pristop k matematiki se trudi zadostiti obema Benacerrafovima izzivoma. To stori tako, da se opre na matematični strukturalizem, hkrati pa sprejme fizikalistično teorijo univerzalij. Meni, da je matematika znanost o strukturah, ki veljajo med stvarmi, ne pa o stvareh, ki odražajo te strukture. Na ta način učinkovito nasprotuje prvemu Benacerrafovemu pomisleku – števila so res lahko samo strukture. Toda te strukture so po Bigelowu univerzalije. A to še ni

vse: te strukture so tudi objektivne relacije med resničnimi (tistimi, ki fizično obstajajo) stvarmi – objekti, kadar gre za naravna števila in med relacijami, kadar gre za vsa ostala števila. Na ta način se avtor obrača stran od platonističnega pristopa k matematiki in k univerzalijam na splošno. Univerzalije so fizične tako, da obstajajo kot resnične lastnosti fizičnih stvari in fizične relacije med fizičnimi stvarmi. Njihovega obstoja ne moremo vpeljati *a priori* – utemeljen mora biti s splošno znanstveno metodo. Takšna zvrst realizma je tako imenovani aposteriorni realizem (D. Armstrong), Bigelowov fizikalistični pristop k matematiki pa je njegova posebna različica.

Če so števila fizična in se torej matematika po svoji naravi ne razlikuje od znanosti, potem smemo verjeti, da so števila in s tem ostale matematične bitnosti dostopne našemu védenju na podoben način kot ostale (znanstvene) bitnosti. Če to drži, tudi Benacerrafova epistemološka dilema ne vzdrži več: fizikalistična ontologija matematike ne postavlja pod vprašaj epistemološkega dostopa k matematičnim bitnostim. Če bi torej Bigelowov fizikalistični pristop uspel, Bigelowu ne bi bilo treba posebej obravnavati epistemologije števil. Lahko bi se enostavno oprl na splošno znanstveno metodo. Že samo njegova ontologija bi mu omogočila, da ne bi tako usodno povezoval ontoloških vprašanj o matematiki z epistemološkimi kot Benacerraf.

Standardni očitki na račun Bigelowa (*glej* Milne, 1994: 306-307; James, 1990: 531) merijo predvsem na naslednjo avtorjevo odločitev: "... epistemologija me v tej knjigi ne zanima. Naslavljam vprašanje, kaj števila so, in ne, kako lahko kaj vemo o njih." (Bigelow, 1988: 4) Toda, kakor smo videli, neupoštevanja omenjene Benacerrafove dileme avtorju ne moremo neposredno očitati, preden ne pokažemo, da njegova ontologija ni mogoča. Zato bo moja kritika, v nasprotju z omenjenimi standardnimi kritikami, veljala prvenstveno in neposredno Bigelowovi ontologiji. Toda preden se ji posvetimo, si še na kratko na splošno oglejmo Bigelowov pristop.

3. Bigelowova "realnost števil"

V svoji knjigi *Realnost števil* Bigelow dokazuje, da vsa števila (naravna števila, racionalna števila, realna in kompleksna števila) obstajajo v fizikalni realnosti. Niso abstrakcije, ki bi obstajale ločeno od fizičnih stvari, in tudi ne prazni simboli, s katerimi bi se igrala matematika.

Avtorjev dokaz lahko grobo razdelimo na štiri stopnje. Najprej dokazuje, da je matematika teorija univerzalij (edina prava). Pri tem se opre na Lockovo teorijo primarnih in sekundarnih kvalitet in dokazuje, da so primarne kvalitete neverjetno blizu snovi, s katero se ukvarja matematika. Iz obojega sledi, da lahko razumemo vse sekundarne kvalitete zgolj kot kombinacije primarnih, in tako lahko matematika zaobjame vse uprimerjene univerzalije.

Naslednja stopnja dokaza se osredotoča na neposredno prostorsko-časovno prisotnost univerzalij v svetu. Avtor namreč želi pojmovati univerzalije tako, kot da obstajajo neposredno v realnem svetu kot dejanske fizikalno realne lastnosti in rela-

cije in tako njihova prisotnost ni zastopana zgolj preko njihovih uprimeritev. Takšen koncept prisotnosti univerzalij Bigelow imenuje *rekuriranje*. Toda, če so univerzalije res neposredno fizično prisotne, to je, če res rekurirajo, kje in kdaj v fizičnem svetu potem so? Ali lahko obstajajo na različnih krajih istočasno in ali lahko obstajajo v različnih nepovezanih časovnih obdobjih na istem kraju, kakor zanje velja, če njihovo prisotnost v svetu dojemamo zgolj preko njihovih uprimeritev? Kar se tiče lastnosti, avtor reši ta problem tako, da jih primerja s filozofskim pojmovanjem atomov, ki imajo obliko, a so brez delov. Takšni atomi se lahko nahajajo večkratno kadarkoli in kjerkoli v prostorsko-časovno povezanem prostoru-času, medtem ko lahko za Bigelowa lastnosti obstajajo tudi v nepovezanih intervalih prostora-časa. Ta dodatek k filozofskemu pojmovanju atomov zanj enostavno definira obstoj lastnosti kot rekurenc. Kar pa se tiče relacij, avtor privzame, da so rekurence, ki lahko večkratno obstajajo v vsakem povezanem področju prostora-časa, ki vsebuje *relata*. Poleg tega univerzalije na splošno, lastnosti in relacije, lahko imajo tako imenovani prekinjen obstoj – v določenih časovnih obdobjih med obdobji obstoja lahko relacija ali lastnost ne obstajata nikjer. Bistvena razlika med principom pojmovanja univerzalij kot rekurenc in principom pojmovanja univerzalij kot uprimeritev je torej zgolj v tem, da gre v prvem primeru za fizični obstoj univerzalij, v drugem pa zgolj za njihovo prisotnost v svetu prek uprimeritev. Bistvena posledica te razlike je zgolj ena: rekurirajoče univerzalije, kakor vse, kar je fizično, ne morejo bivati večkratno na istem mestu, medtem ko princip uprimerjanja to omogoči. Ista univerzalija je lahko večkratno uprimerjena na istem mestu.

Tretja stopnja dokaza se ukvarja z definicijo števil kot realnih relacij med fizikalnimi stvarmi v svetu. Najprej je potrebno na ta način vpeljati naravna števila. Bigelow privzame, da so števila relacije med posameznimi fizikalnimi objekti. Natančneje: vsako naravno število n je n-mestna relacija n-ternega vzajemnega razlikovanja ($n \geq 2$). Na primer, število tri je tromestna relacija $(x \neq y)$ & $(x \neq z)$ & $(y \neq z)$. Števili nič in ena sta vpeljani *ad hoc*, to je $(\exists y)$ $(y = x)$ (ena), $(\forall y)$ $(y \neq x)$ (nič). Racionalna, realna (racionalna in iracionalna) in imaginarna števila pa so vsa obravnavana kot relacije med relacijami. Racionalna števila so relacije med naravnimi števili. Do njih lahko pridemo tako, da štejemo korake v tako imenovanih relacijskih verigah. Na primer, racionalno število 1/2 je relacija med starševsko relacijo in starostarševsko relacijo, 1/3 je relacija med starševsko in prastarševsko (staro-staro starševsko) relacijo itd. Iracionalna števila so relacije med magnitudami (Bigelow se osredotoča na dolžine). Te relacije držijo, če in samo če drži določena neskončna veriga pogojev (podobna klasični definiciji iracionalnih števil). Tankočutna razlika med Bigelowovo in klasično definicijo iracionalnih števil je v tem, da prva ne identificira neke določene neskončne verige z nekim določenim iracionalnim številom, ampak trdi, da to število rekurira, če imamo neko takšno verigo pogojev, ki držijo. (Z drugimi besedami: tudi druge podobne verige pogojev bi lahko enako dobro opravile isto nalogo.) Imaginarna števila pa so vpeljana preko dvodimenzionalnih magnitud – na podoben način kot pri tradicionalni geometrični vpeljavi.

Na koncu, četrta stopnja dokaza brani avtorjev pristop proti kakršnikoli različici

apriornega realizma glede matematičnih bitnosti. Posebej nasprotuje pojmovanju prisotnosti univerzalij v svetu zaradi tega, ker bi zadostile tako imenovanemu načelu "truthmakerja" – trditvi, da morajo vse resnice posedovati "truthmakerje". Bigelow dokazuje, da kar je resnično, nikdar ne more supervenirati samo nad tem, kateri običajni predmeti in običajni posamezniki obstajajo ali ne obstajajo. Cilj te stopnje njegovega dokaza je zavrniti teorijo množic kot relevanten apriorni izvor matematike.

3. 1 Slabosti Bigelowovega dokaza

Prva stopnja Bigelowovega dokaza – trditev, da je matematika edina teorija univerzalij – se ne ukvarja neposredno z vprašanjem o realnosti števil. Ta trditev je pomembna za to, da umesti avtorjevo prepričanje v širši okvir. Omogoča neposreden prehod iz fizikalizma v matematiki v splošno fizikalistično teorijo univerzalij. To pa je posebno vprašanje. Če bi bil avtorjev fizikalizem v matematiki uspešen, bi nam takšen prehod lahko načelno omogočal nasprotovanje drugim različicam fizikalizma na splošno, kaj šele kakršnikoli različici platonizma. Čeprav bi to lahko bila zanimiva splošna strategija, ne zadeva dokazov za ali proti realnosti števil. Predstavljamo si lahko, da tudi če bi imeli zadostne razloge za to, da bi verjeli splošni teoriji univerzalij, ki bi bila bistveno drugačna od naše teorije posebne podzvrsti univerzalij – števil, bi še vedno lahko poskusili umestiti slednjo kot poseben primer splošne. Zato smo lahko nevtralni glede vprašanja o splošni teoriji univerzalij, kadar gre za realizem števil.

Podobno kot prva tudi četrta stopnja dokaza posega dalj in mimo argumentov o realizmu števil. Pokaže samo, da če so matematične bitnosti na poseben način pojmovane univerzalije – rekurence, matematičnim bitnostim pa ne moremo priznati obstoja na podlagi načela "truthmakerjev". Naperjena je proti teoriji "truthmakerjev" kot možni konkurenčni realistični ontologiji števil. Toda tudi če ta stopnja dokaza ne bi uspela in bi bilo možno Bigelowov realizem števil razložiti tudi s pomočjo ostalih teorij, recimo prav s teorijo "truthmakerjev", bi to ne pomenilo, da je Bigelowov pristop napačen, ampak zgolj, da ni edinstven. Tudi če ne bi bil edinstven, pa bi lahko bil najbolj prikladen ali najenostavnejši. Lahko torej zaključimo, da tako kot prva tudi četrta stopnja Bigelowovega dokaza ni neposredno vpletena, ko gre za realnost števil.

V nasprotju s prvo in četrto pa druga in tretja stopnja predstavljata jedro Bigelowovega dokaza fizikalistične "realnosti števil". Druga se posveča fizični realnosti univerzalij in relacij pojmovanih kot rekurenc, tretja pa konkretno definira števila. V razdelkih, ki sledijo, bomo videli, da ti dve bistveni stopnji dokaza skrivata nekaj resnih pomanjkljivosti.

4. Lastnosti in relacije ter fizični svet

Najprej se posvetimo splošnim vprašanjem o fizični naravi relacij in lastnosti.

Vzemimo recimo nekaj fizičnih stvari, na primer nekaj tako imenovanih srednjerazsežnih fizikalnih predmetov. Potem privzemimo, da obstajajo relacije med njimi in da te relacije niso vse nefizične stvari. Pa lahko res trdimo nasprotno, da so namreč vse relacije fizične?

Če je odgovor pritrdilen – in takšna je Bigelowova odločitev –, potem se moramo boriti proti klasični fizikalistični ideji o supervenienci in klasičnem fizikalističnemu programu redukcije nefizičnih lastnosti in relacij na fizične. Pritrdilen odgovor namreč neposredno zanika možnost takšne redukcije in se izkaže kot izjemno drago doplačilo k standardni vozovnici na poti k fizikalizmu. (Glavni problem je v tem, da obstajajo nekatere univerzalije, ki so lastnosti fizičnih stvari in relacije med fizičnimi stvarmi, a same ne morejo biti pojmovane kot fizične – na primer lastnost "biti državljan Slovenije".)

Toda tudi če je odgovor nikalen, imamo probleme. Začeti moramo dokaj nerodno raziskavo o tem, katere med relacijami in lastnostmi so fizične in katere niso, in kakšen je odnos med njimi. Za primer vzemimo kar naravna števila. Če so naravna števila res relacije med fizičnimi stvarmi, mogoče lahko dokažemo, da so te relacije fizične. Toda kaj se zgodi, če so relacije med nefizičnimi stvarmi, kot recimo tedaj, ko štejemo abstraktne bitnosti, ideje itd.? Domnevamo, da v tem primeru naše relacije ne morejo biti več fizične. Če se zavzemamo za takšen pogled na števila, moramo torej bodisi prepovedati štetje abstraktnih stvari bodisi vpeljati neke vrste dvojno definicijo naravnih števil – eno za štetje fizičnih števil, za štetje nefizičnih drugo, ali pa enostavno reči, da v splošnem lahko fizična relacija drži tudi med nefizičnimi stvarmi. Prva in druga možnost sta očitno nesmiselni, ostane le tretja, kateri vsaj težko verjamemo.

5. Števila, rekurence in uprimeritve

Čeprav smo videli, da načeloma ni enostavnih razlogov za to, da bi verjeli, da relacije obstajajo kot fizične stvari v prostoru-času, nas še vedno lahko zanima, kako bi vsaj neko posebno zvrst relacij (recimo števila) na nek poseben način zasnovali tako, da bi to lahko storili. Bigelow predlaga, da to posebno zvrst univerzalij, to je števila, pojmujemo kot rekurence. Videli bomo, da moramo rekurence – če hočemo, da so števila – pojmovati v širšem smislu, kot to stori Bigelow, toda na ta način rekurence zgolj prevzamejo navadno vlogo uprimeritev. Poleg tega velja, da rekurirajo tudi partikularije, ne samo univerzalije.

Ponavadi – v nasprotju z Bigelowovim fizikalizmom – univerzalije ne obstajajo v fizičnem svetu. Univerzalije so samo uprimerjene v njem. Uprimerjene so lahko na različnih krajih ob istem času, ob različnih časih na istem mestu, toda lahko so večkratno uprimerjene tudi na istem mestu in ob istem času. (Primer za takšno večkratno uprimeritev je recimo uprimeritev univerzalije "1/2" v enem kvantnem delcu, recimo v elektronu: najprej v njegovem spinskem kvantnem številu J in v drugo v njegovem magnetnem spinskem kvantnem številu m.)

Spomnimo se, kaj se zgodi, če privzamemo, da so univerzalije Bigelowove rekurence. Če univerzalije rekurirajo, lahko obstajajo na različnih mestih ob istem ča-

su in ob različnih časih na istem mestu. Do tod je vse enako, kot če univerzalije pojmujemo kot uprimeritve. Toda vendarle obstaja razlika: univerzalije kot rekurence, v nasprotju z uprimerjenimi univerzalijami, ne morejo večkratno obstajati na istem mestu ob istem času. To razliko med uprimeritvami in rekurencami moramo vzeti v zakup, če hočemo zagovarjati Bigelowov fizikalizem. Toda, ali je račun res plačan?

Ko Bigelow govori o množicah (1988: 107-109), vpelje pojem "heaccietas" (gre za sholastični izraz, ki pomeni "totost" oziroma – v angleščini – "thisness"). *Haeccietas* je lastnost "biti to". Na primer: *a*-jeva *heaccietas* je lastnost "biti *a*". Predstavljajmo si nek fizičen objekt v prostoru-času. Na istem mestu in ob istem času kot takšen objekt obstajajo tudi njegove večkratne *heaccietete h*, *hh*, *hhh*, *hhhh*, *hhhh*, *hhhhh* itd. (*glej* Lewis, 1989). Med *heaccietetami h* in *hh* obstaja relacija dvojne različnosti, a ista relacija obstaja tudi med *heaccietetami hh*, *hhh* in *hhh*, *hhhh* itd. Po Bigelowovi ontologiji je takšna relacija natančno število dve in tako lahko zaključimo, da ta univerzalija – število dve – večkrat rekurira na istem mestu ob istem času. To pa je v nasprotju z Bigelowovo definicijo rekurence ter kaže na to, da je koncepcija števila kot takšne rekurence preozka. Te težave se seveda lahko rešimo tako, da v nasprotju z Bigelowovo definicijo rekurenci dovolimo rekurirati večkrat na istem mestu ob istem času. Toda s tem dosežemo zgolj to, da se pojem rekurence močno približa in izenači s pojmom uprimeritve. Utemeljeno lahko torej sumimo, da tako spremenjen pojem rekurence ni nič drugega kot enostavna verbalna zamenjava za pojem uprimeritve.

Glede rekurenc pa obstaja še drug problem. Ne samo da so zasnovane preozko, da bi jih lahko identificirali z univerzalijami – včasih so tudi preširoke. Namreč tudi nekatere partikularije lahko rekurirajo. Partikularije – kot so elektroni, fotoni itd. in delci kvantne mehanike – lahko na splošno pojmujemo tako, da obstajajo na večkratnih prostorsko-časovnih lokacijah. Zaradi tega potrebujemo nekaj, po čemer bi razlikovali rekurence, ki so partikularije, od tistih, ki so univerzalije. Bigelow predlaga, da slednje niso vzročno organizirane (Bigelow, 1988: 24-26). Rekurence, ki so univerzalije, med seboj niso enako vzročno povezane kot tiste, ki so partikularije. Toda obstaja še druga rešitev. Tako ali tako namreč vemo, da moramo dopustiti, da rekurence rekurirajo večkrat na istem mestu ob istem času. Če je to res, tedaj partikularije sploh niso več rekurence v istem smislu kot univerzalije – nenavadno bi bilo trditi, da je kakršnakoli partikularija prisotna večkratno na istem mestu ob istem času.

6. Števila

V četrtem razdelku smo videli, da ne moremo upravičeno verjeti, da so vse relacije fizične in da obstajajo v prostoru-času. V prejšnjem razdelku pa smo videli, da se, tudi če se osredotočimo samo na tiste univerzalije, ki so števila in jih pojmujemo kot rekurence, to pojmovanje močno približa klasičnemu pojmovanju univerzalij kot uprimeritev. Toda tudi če je princip rekurenc precej blizu principu uprimeritev, lahko še vedno upamo, da rekurirajoče univerzalije (ali vsaj rekurirajoča števila) v nasprotju z uprimerjenimi dejansko fizično obstajajo in da sum o zgolj

drugačnem poimenovanju ni utemeljen. Zato še vedno lahko upamo, da obstaja neka možnost za Bigelowovo realistično pojmovanje števil. V temu razdelku bomo videli, da temu kljub vsemu ni tako. Najprej bomo pokazali, da ima Bigelowova vpeljava naravnih števil precej problemov pri definiranju *vseh* naravnih števil. Drug očitek pa bo veljal Bigelowovi definiciji realnih števil na splošno. Nazadnje pa se bomo pomudili še pri problemih, ki zadevajo definiranje *vseh* realnih števil (posebej tako imenovanih transcendentalnih iracionalnih števil, kot sta število *e* in mnogi naravni in decimalni logaritmi), kot dela časovno prostorske realnosti.

6. 1 Naravna števila

Bigelowov fizikalistični pristop pravi, da je poljubno naravno število *n* *n*-mestna relacija *n*-kratne vzajemne različnosti, ki rekurira. Na primer za število $n = 3$ je ta relacija naslednja:

$(x \neq y)$ & $(x \neq z)$ & $(y \neq z)$, hkrati pa število tri rekurira v fizičnem svetu, ko takšna relacija drži med nekimi partikularijami (partikularnimi fizičnimi objekti):

$(\exists x)(\exists y)(\exists z)$ $[(x \neq y)$ & $(x \neq z)$ & $(y \neq z)$ & Fx & Fy & $Fz]$.

{Število *F*-ov je tri.}

Takšna definicija nam ne omogoča vpeljave števil nič in ena. To sicer prinaša določeno neskladje v definicijo, ker moramo ti dve števili vpeljati na *ad hoc* način – recimo $(\exists y)$ $(y = x)$ za ena in $(\forall y)$ $(y \neq x)$ za nič –, toda dejstvo, da moramo ena in nič obravnavati ločeno, nas ne sme vznemirjati nič bolj, kot je vznemirjalo Cantorja, Dedekinda ali Husserla.

Kaj pa zelo velika števila in kaj šele Cantorjeva neskončna ordinalna števila kot ω kardinalnosti $\aleph_0$ (ali pa celo števila višjih kardinalnosti $\aleph_1$ itd.)? Ali lahko zagotovimo njihov obstoj? Bigelow predlaga, da jih tolmačimo kot neskončnokratne relacije vzajemne neenakosti. Toda zakaj bi šli še dlje in predpostavili, da rekurirajo v svetu? Ali na svetu obstaja neskončno fizičnih objektov? Predpostavimo, da je to res. Toda to je vsekakor kontingentno dejstvo, ki je odvisno od rezultatov znanosti, kar pa je neugodno. Če ni res, potem moramo omejiti fizikalistično pojmovanje ordinalnih števil samo na nekatera, domnevno sicer še vedno zelo velika, a vseeno ne neskončna ordinalna števila. Ostala morajo še vedno biti zgrajena klasično, na primer preko teorije množic, toda na tak način ne rekurirajo. Poleg tega smo v tem primeru obsojeni na neke vrste finitizem. Toda finitizem se mora spoprijeti z nekaterimi splošnimi očitki glede pregledljivosti [*surveyability*]. Očitno je, da je pregledljivost neodločljiva [*vague*]. Ko govorimo o ordinalnih številih, to enostavno pomeni, da nikdar ne moremo vedeti, kako velika števila lahko še vedno dopustimo, in tako je naša razlaga nasplošno podvržena problemom paradoksa plešca. (Koliko las lahko še dopustimo, da je nekdo plešast?)

6. 2 Realna števila

Vsa ostala števila Bigelow zgradi kot relacije med relacijami. Ko gre za racionalna števila, so to enostavno relacije med naravnimi števili. Z drugimi besedami, to

so relacije drugega reda: relacije med tistimi relacijami, ki držijo med posamičnimi predmeti. Ko gre za iracionalna števila, so to relacije med relativnimi magnitudami – za Bigelowa med relativnimi dolžinami, ki so sicer geometrične bitnosti, a domnevno tudi relacije, ki rekurirajo v svetu. Če torej hočemo definirati iracionalno število, na primer √2, vzamemo pravokoten enakokrak trikotnik, katerega krak znaša *k* (*k* = 1) in hipotenuza *h* (*h* = √2). *K* in *H* naj bosta dve relaciji, *K daljši-za-k-relacija*, *H daljši-za-h-relacija*. √2 je torej relacija med *H* in *K*. Edini problem, ki se še pojavlja, je, da te relacije ne moremo podati tako, da bi šteli korake v neki relacijski verigi, ker sta relaciji *H* in *K* nesoizmerljivi. Toda takšne korake vseeno lahko štejemo, če vpeljemo posebno relacijo *D* "daljši-kvečjemu-za-pol-k", tako da en korak *D*-ja ne bo nikoli enak enemu koraku *K*-a, toda dva koraka *D*-ja mu včasih bosta. Na podoben način lahko vpeljemo zopet novo relacijo *D*', ki natančneje postavi relacijsko verigo med *H* in *K*, *D*'' je še bolj natančna itd. Bigelow potem predlaga, da je naše iracionalno število relacija med danimi magnitudami, če in samo če takšna veriga bolj in bolj natančnih relacij drži. Vidimo torej, da je glavna značilnost Bigelowovega pristopa pri definiranju iracionalnih števil, da postavi rekurirajoče dolžine kot kandidate za *relata* v relacijah, ki niso neposredno podane kot neskončne vrste, ampak se takšnim vrstam zgolj pokoravajo.

Ko govorimo o realnih številih, lahko takoj pomislimo na tri splošne pripombe. Če realna števila res rekurirajo v fizični realnosti na način, kot smo ga opisali v prejšnjem odstavku, moramo privzeti, da je fizični prostor neskončen in da je matematični kontinuum. Ne glede na dejstvo, da vsakršen podoben privzetek na splošno temelji na kontingentni resničnosti, ki temelji na znanosti, nobeden od obeh ni v skladu s sodobno znanostjo. Fizični prostor ima meje (dejansko se te meje širijo) in tudi zelo neverjetno je, da bi lahko primerjali infinitezimalno majhne prostorske intervale (načelo nedoločljivosti v kvantni mehaniki). Čeravno bi lahko privzeli, da nekatera realna števila rekurirajo v resničnosti, bi bilo dokaj neverjetno, da bi lahko isto storili za kontinuum (vsa realna števila).

Toda ločeno od tega lahko ob Bigelowovi definiciji realnih števil pripomnimo še nekaj: ne samo, da potrebujemo dve rekurirajoči dolžini, za Bigelowovo definicijo potrebujemo tudi neskončno verigo pogojev. Kaj potrebujemo, da lahko postavimo takšno verigo? Prav gotovo so to neskončna ordinalna števila. Tako zopet postavljamo vprašanje o obstoju neskončno veliko predmetov v fizičnem svetu, kakor smo to že storili, ko smo govorili o naravnih številih.

Na koncu moramo pripomniti, da obstajajo iracionalna števila posebne vrste, na katera Bigelow ni posebej pozoren. Gre za t.i. transcendentalna (v nasprotju z algebraičnimi) iracionalna števila, na primer π in *e*, in nekatere vrednosti funkcij, kot so *log* in kotne funkcije. Glavni problem teh števil je, da ne morejo vsa rekurirati kot razmerja med dolžinami. Lahko sicer vzpostavimo geometrična razmerja za število π (na primer razmerje med radijem in obsegom kroga) ali za vrednosti kotnih funkcij (razmerja različnih stranic trikotnikov), toda težko si je predstavljati, kako bi podobno storili za vrednosti vseh logaritmov in za število *e*. Ta števila lahko rekurirajo v svetu zgolj kot razmerje med nekaterimi veličinami v fiziki, recimo med veličinami količin, kot sta "pretečeni čas" in "populacijska razlika" pri radioaktivnem razpadu. Toda, ali lahko fiziki verjamemo v enaki meri kot geome-

triji? Ali nam fizika resnično pravi, da so "tam zunaj" logaritmi? Tudi če bi, bi zopet morali poskrbeti za to, kako bi postavili zahtevano verigo pogojev, ki bi omogočali soizmerljivost. Zelo verjetno je, da bi to zahtevalo vnaprejšnje poznavanje teh števil – izbira osnovnih korakov v verigi bi bila, recimo, verjetno dosti bolj kompliciranа kot pri številu $\sqrt{2}$, kjer smo se lahko naslonili na geometrijska dejstva.

7. Zaključek

Fizikalizem v matematiki predstavlja zapleten podvig. V obzir mora vzeti različna metafizična vprašanja. Natančneje, razložiti mora, kako matematične bitnosti bivajo v fizičnem svetu. Raziskali smo posebno različico fizikalizma, katerega namen je postaviti eksistenco števil kot relacij in torej univerzalij. Pokazali smo, da čeprav bi bilo mogoče nekatere univerzalije podati kot rekurence, temu v splošnem ni tako, ko gre za števila. Če vzamemo števila kot poseben primer univerzalij in torej relacij, ki domnevno obstajajo v prostoru-času, sicer lahko konstruiramo nekatere med njimi (pravzaprav prav veliko). Toda obstajajo števila, ki jih najverjetneje ne moremo zgraditi tako, kot predlaga fizikalist Bigelowovega kova: neskončna ordinalna števila (ta problem bi mogoče lahko rešili tako, da bi se oprli na neko obliko finitizma), posledično realna števila in posebno transcendentalna iracionalna števila. Zato lahko zaključimo, da čeprav se Bigelowov pristop k fizikalizaciji matematike izkaže za možno ontologijo za nekatera števila, prav gotovo ne zaobjame vseh.

Splošen zaključek, ki ga narekuje omenjena dihotomija, je torej, da je uspeh Bigelowove fizikalizacije omejen zgolj na tiste matematične bitnosti, ki so že tako ali tako dokaj neproblematično uprimerjene v fizičnem svetu, sledeč bolj standardnim ontologijam, kot je Bigelowova. Na ta način Bigelowov pristop ne prinaša ničesar novega k našemu razumevanju matematičnega védenja.

On Reality of Numbers

There are at least two recent distinct physicalist approaches to mathematics. First, there is Maddy's set theoretic realism. This does not concern us here. Second, there is Bigelow's approach as it was put forward in his book "The Reality of Numbers". In my paper, I discuss some major difficulties concerning Bigelow's physicalism in general, and argue that it is problematic to construe all numbers on his methodology. In particular, there are some difficulties concerning infinite numbers. Be-

sides, some transcendental reals like e and many logarithms may not exist in physical space-time as lengths in Bigelow's sense.

Keywords: philosophy of mathematics, ontology of numbers, physicalism, Bigelow.

Literatura

Benacerraf, P. (1965). "What numbers could not be". *Philosophical Review*, 74.

Benacerraf, P. (1973). "Mathematical Truth". V Benacerraf, P. & Putnam, H. (ur.), *Philosophy of mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press.

Bigelow, J. (1988). *The Reality of Numbers*. Oxford, Clarendon Press.

James, E. P. (1990). "The Reality of Numbers by John Bigelow" (recenzija). *Philosophical Quarterly*, 40.

Mates, B. (1986). *The Philosophy of Leibniz: Metaphysics and Language*. New York: Oxford University Press.

Maddy, P. (1990). *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Milne, P. (1994). "The Physicalization of Mathematics". *British Journal for Philosophy of Science*, 45.

Lewis, D. (1989). "Bigelow, John. The Reality of Numbers" (recenzija). *Australasian Journal of Philosophy*, 67.

Williams, S. G. (1991). "The Reality of Numbers by John Bigelow" (recenzija). *Mind*, 100.