ANαliZA

časopis za kritično misel

Letnik 15, številka 1-2, avgust 2011 · ISSN 1408-2969

FILOZOFIJA MATEMATIKE

Øystein Linnebo

Platonizem v filozofiji matematike

prevedla Iris Merkač

Citiranje: Øystein Linnebo, »Platonizem v filozofiji matematike«, *Analiza: časopis za kritično misel* 15, št. 1-2 (2011): 127–146.

Prevod. Licenca Creative Commons, ki velja za arhiv revije, za prevode ne velja; pravice izvirnika pripadajo njegovim imetnikom.

Izdajatelj: Društvo za analitično filozofijo in filozofijo znanosti, Ljubljana.

Elektronska različica je bila leta 2026 rekonstruirana iz skena tiskane izdaje (OCR, ročno pregledano) in preverjena s tiskano izdajo. Številke strani ustrezajo tiskani izdaji; prelomi strani znotraj prispevka se lahko nekoliko razlikujejo.

Øystein Linnebo
Prevedla Iris Merkač

PLATONIZEM V FILOZOFIJI MATEMATIKE*

Prvič objavljeno v soboto, 18 julija 2009

Platonizem o matematiki (ali *matematični platonizem)* je metafizično stališče, da obstajajo abstraktni matematični objekti, katerih eksistenca je neodvisna od nas in našega jezika, mišljenja in postopkov. Tako kot elektroni in planeti obstajajo neodvisno od nas, obstajajo tudi števila in množice. In tako kot izjave o elektronih in planetih naredijo resnične ali neresnične objekti, s katerimi se ukvarjajo, in popolnoma objektivne lastnosti teh objektov, naredijo tudi izjave o številih in množicah. Matematične resnice torej odkrivamo, ne izumljamo.

Najpomembnejši argument za eksistenco abstraktnih matematičnih objektov izhaja od Gottloba Fregeja in ima naslednjo obliko (Frege 1953). Matematični jezik se pretvarja, da se sklicuje na in kvantificira preko abstraktnih matematičnih objektov. In veliko število matematičnih teoremov je resničnih.

Vendar stavek ne more biti resničen, razen *če* njegovim pod-stavkom ne uspe storiti, kar dozdevno počnejo. Torej obstajajo abstraktni matematični objekti, na katere se ti izrazi nanašajo in preko katerih kvantificirajo.

Kljub Fregejevemu argumentu so filozofi razvili različne ugovore proti matematičnemu platonizmu. Tako za abstraktne matematične objekte trdijo, da so epistemološko nedostopni in metafizično problematični. Matematični platonizem je bil med najbolj vročimi temami razprav v filozofiji matematike v zadnjih nekaj desetletjih.

1. Kaj je matematični platonizem?
   - o 1.1 Zgodovinske opombe
   - o 1.2 Filozofski pomen matematičnega platonizma
   - o 1.3 Anti-nominalizem
   - o 1.4 Realizem resničnostne vrednosti
   - o 1.5 Matematični pomen platonizma

2. Fregejev argument za eksistenco
   - o 2.1 Struktura argumenta
   - o 2.2 Zagovor klasične semantike
   - o 2.3 Zagovor resnice
   - o 2.4 Pojem ontološke zavezanosti

* Prevedeno po Øystein Linnebo, Philosophy of Mathematics, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

3. Od eksistence do matematičnega platonizma
   - o 3.1 Abstraktnost
   - o 3.2 Neodvisnost

4. Ugovori proti matematičnemu platonizmu
   - o 4.1 Epistemološki dostop
   - o 4.2 Metafizični ugovor
   - o 4.3 Drugi metafizični ugovori

5. Lažje oblike platonizma
   - o 5.1 Polni platonizem
   - o 5.2 Lažje semantične vrednosti
   - o 5.3 Kaj je vendar matematični platonizem?

Bibliografija

1. Kaj je matematični platonizem?

Matematični platonizem lahko definiramo kot skupino naslednjih treh trditev:

Eksistence.

Obstajajo matematični objekti.

Abstraktnosti.

Matematični objekti so abstraktni.

Neodvisnosti.

Matematični objekti so neodvisni od razumnih bitij in njihovega jezika, mišljenja in postopkov.

Dokaz zgornje definicije je dokaj standarden.

Platonizem na sploh (v nasprotju s platonizmom o določeni matematiki) je vsako stališče, ki izhaja iz zgornjih treh trditev, ko nadomestimo pridevnik »matematičen« s katerimkoli drugim pridevnikom.[1]

Prvi dve trditvi sta dokaj jasni za pričujoče namene. **Eksistenco** je mogoče formalizirati kot »$\exists x Mx$«, kjer »Mx« skrajša predikat »*x* je matematični objekt«, ki je resničen za vse in samo objekte, ki jih preučuje čista matematika, kot so števila, množice, in funkcije. **Abstraktnost** pomeni, da je vsak matematični objekt abstrakten, kjer za objekt pravimo, da je abstrakten le v primeru, ko ni prostorsko-časoven in je (potemtakem) vzročno neučinkovit.

Neodvisnost je manj jasna, kot drugi dve trditvi. Kaj pomeni pripisati to vrsto neodvisnosti objektu? Najočitnejša razlaga je verjetno protidejstveno pogojna, da če ne bi bilo nobenih razumnih bitij, ali če bi bili njihov jezik, mišljenje ali

[1] Trditev se zdi zgrešena. Če zamenjamo »matematičen« z »jezikovni« dobimo jezikovno plat, a ne platonizma na sploh. Platonizem na sploh bi lahko definirali kot konjunkcijo: »Obstajajo abstraktni objekti in abstraktni objekti so neodvisni od (pripovedovalčeve vednosti)«.

postopki drugačni, bi še vedno obstajali matematični objekti. Dvomljivo je, da bi ta razlaga opravila vse to, kar bi naj naredila trditev o **Neodvisnost** (glej razdelek 5.3); za zdaj, naj bo **Neodvisnost** nekoliko shematična.

1.1 Zgodovinske opombe

Platonizem je treba razlikovati od stališča zgodovinskega Platona. Le majhno število udeležencev v sodobni razpravi o platonizmu predlaga tehtne razlagalne trditve o Platonovem stališču, še manj pa ga zagovarja. Čeprav je stališče, ki mu pravimo »platonizem«, navdihnila znana Platonova teorijo o abstraktnih in večnih idejah, platonizem v našem času definiramo in o njem razpravljamo neodvisno od njegove prvotne zgodovinske inspiracije.

Ne samo, da platonizem v razpravi ni Platonov, platonizem je, kot je opredeljen zgoraj, čisto metafizično stališče: treba ga je razlikovati od drugih stališč, ki imajo bistvene epistemološke vsebine. Mnogo starejših opredelitev platonizma dodaja močne epistemološke trditve v smislu, da imamo neko neposredno razumevanje ali vpogled v področje abstraktnih objektov (glej na primer Rees 1967.) Ampak koristno (in danes precej standardno) je pridržati izraz »platonizem« za čisto metafizično stališče, ki je opisano zgoraj. Mnogi filozofi, ki zagovarjajo platonizem v tem čistem metafizičnem smislu, bi zavrnili dodatne epistemološke trditve. Primeri vključujejo Quinea in druge filozofe, ki jih je privlekel tako imenovani *argument iz neizogibnosti*, ki poskuša dati splošni empirični zagovor matematičnega platonizma.

Nazadnje, zgornja definicija »matematičnega platonizma« izključuje trditev, da so vse resnice čiste matematike nujne, čeprav je bila ta trditev tradicionalna pri večini platonistov. Poleg tega je ta izključitev upravičena z dejstvom, da nekateri filozofi, ki so na splošno veljali za platoniste (na primer, Quine in nekaj privržencev omenjenega argumenta iz neizogibnosti) zavračajo to dodatno modalno trditev.

1.2 Filozofski pomen matematičnega platonizma

Matematični platonizem ima precejšnji filozofski pomen. Če bi bil resničen, bi to bilo veliko breme za fizikalistovo idejo, daje realnost izčrpana s fizikalnim. Iz platonizma izhaja, da realnost sega daleč preko fizikalnega sveta in vsebuje objekte, ki niso del vzročne in prostorsko-časovne ureditve, ki jih preučuje fizika.[2]

[2] Ali je platonizem neposredno *v protislovju* s fizikalizmom? Odgovor bo odvisen od tega, kako se definira fizikalizem. Če je fizikalizem definiran kot stališče, da vse neposredno supervenira na fizičnem, in če so vse matematične resnice nujne, potem bosta stališči formalno konsistentni. Ob predpostavki *S5* sta katerakoli svetova enaka glede nujnih resnic. Zato *a fortiori*, katerakoli svetova, ki sta enaka glede fizikalnih resnic, sta tudi enaka glede matematičnih resnic. Toda to je standardna definicija trditve, da matematične resnice supervenirajo na fizičnem. Če je po drugi strani fizikalizem definiran kot stališče, da so vse bitnosti sestavljene ali tvorjene z osnovnimi fizikalnimi bitnostmi, potem si bosta stališči med seboj v protislovju.

Matematični platonizem, če je resničen, bi bil tudi veliko breme za mnoge naturalistične teorije spoznanja, ker obstaja majhen dvom, da imamo matematično vednost. Matematični platonizem bi potemtakem dokazal, da imamo vednost o abstraktnih (in torej vzročno neučinkovitih) objektih. To bi bilo pomembno odkritje, ki bi ga zelo težko sprejelo veliko naturalističnih teorij vednosti. Čeprav te filozofske posledice niso edinstvene za *matematični* platonizem, je ta posebna oblika platonizma nenavadno dobro primerna za podporo takih posledic. Matematika je izjemno uspešna disciplina tako sama po sebi kot orodje za druge znanosti.[3] Malo sodobnih analitičnih filozofov je pripravljenih nasprotovati bistvenim trditvam discipline, katere znanstvena priporočila so tako močna kot priporočila matematike (Lewis 1991, str. 57-9). Če torej filozofska analiza odkriva, da ima matematika nekatere čudne in presenetljive posledice, bi bilo neprivlačno preprosto zavrniti matematiko.[4] Tista oblika platonizma, ki temelji na disciplini, katere znanstvena priporočila so manj impresivna kot priporočila matematike, ne bi bila v tem ugodnem položaju. Na primer, če ima teologija neke čudne in presenetljive filozofske posledice, mnogo filozofov ne bi oklevalo z zavrnitvijo ustreznih delov teologije.

1.3 Anti-nominalizem

V sodobni filozofiji je *nominalizem* običajno definiran kot stališče, da abstraktni objekti ne obstajajo. (V bolj tradicionalni filozofski uporabi se beseda »nominalizem« namesto tega nanaša na stališče, da ni univerzalij (Glej Burgess & Rosen 1997, str. 13-25). Naj bo *anti-nominalizem* zanikanje nominalizma, to je trditev, da obstajajo abstraktni objekti. *Anti-nominalizem glede matematike* je torej le zveza **Eksistence** in **Abstrakcije**. Ker anti-nominalizem opušča **Neodvisnost**, je logično šibkejši od matematičnega platonizma.

Filozofske posledice anti-nominalizma niso tako močne kot tiste od platonizma. Mnogi fizikalisti bi sprejeli ne-fizikalne objekte pod pogojem, da so ti odvisni od fizikalnih objektov ali da jih je mogoče zreducirati nanje. Ti lahko, na primer, sprejemajo objekte, kot so korporacije, zakoni in pesmi pod pogojem, da so ustrezno odvisni od fizikalnih objektov ali da jih je mogoče zreducirati na nje. Nadalje se zdi, da ni skrivnosti o epistemološkem dostopu do ne-fizikalnih objektov, ki smo jih nekako naredili, ali »tvorili«. Če smo korporacije, zakone in pesmi naredili ali »oblikovane« mi, smo verjetno pridobili vednost o njih v postopku, ko smo jih naredili ali »oblikovali«.

Nekaj stališč v filozofiji matematike je anti-nominalističnih, ne da bi bila platonistična. Primer so tradicionalna intuicionistična stališča, ki potrjujejo eksistenco matematičnih objektov, vendar trdijo, da so ti objekti odvisni od ali

[3] Na primer, obstaja široko razširjen argument med matematiki o vodilnih problemih z njihovega področja ter o vrstah metod, ki so dovoljene pri poskušanju reševanja teh problemov. Nadalje, matematiki so z uporabo teh metod napredovali in še naprej zelo napredujejo pri reševanju teh vodilnih problemov.

[4] Kakorkoli, sami filozofski analizi bi lahko oporekali. Kajti ta analiza presega pravo matematiko in zato avtomatsko ne nasledi njenih močnih znanstvenih priporočil.

da jih tvorijo matematiki in njihova delovanja.[5] Nekateri dodatni primeri stališč, ki so anti-nominalistična, ne da bi bila platonistična, bodo obravnavani v razdelku 5.2.

1.4 Realizem resničnostne vrednosti

Realizem resničnostne vrednosti je stališče, da ima vsaka dobro oblikovana matematična izjava edinstveno in objektivno resničnostno vrednost, ki je neodvisna od tega, ali jo mi lahko poznamo in ali logično sledi iz naših sedanjih matematičnih teorij. Stališče tudi trdi, da je večina matematičnih izjav, ki se štejejo za resnične, dejansko resnična.[6] Tako je realizem resničnostne vrednosti jasno *metafizično* stališče. Vendar v nasprotju s platonizmom ni *ontološko* stališče. Kajti čeprav realizem resničnostne vrednosti trdi, da imajo matematične izjave edinstvene in objektivne resničnostne vrednosti, ni zavezan značilni platonistični ideji, da te resničnostne vrednosti izhajajo iz ontologije matematičnih objektov.

Matematični platonizem jasno motivira realizem resničnostne vrednosti z zagotovljanjem razlage, kako matematične izjave dobivajo svoje resničnostne vrednosti. Vendar bi se zahtevale nadaljnje premise, če bi hoteli, da prvo stališče pripelje do drugega. Kajti četudi obstajajo matematični objekti, lahko referenčna in kvantifikativna nedoločenost prikrajša matematične izjave za njihovo edinstvenost in objektivno resničnostno vrednost. Obratno, realizem resničnostne vrednosti sam po sebi ne implicira **Eksistence** in tako niti anti-nominalizma niti platonizma. Zato obstajajo različne razlage, kako matematične izjave pridejo do tega, da imajo edinstvene in objektivne resničnostne vrednosti, ki ne postavljajo področja matematičnih objektov.[7]

Pravzaprav mnogo nominalistov podpira realizem resničnostne vrednosti, vsaj glede osnovnih vej matematike, kakršna *je* aritmetika. Nominalisti te vrste so zavezani čudno zvenečem stališču: čeprav je navadna matematična izjava

(1) Obstajajo praštevila med 10 in 20.

resnična, dejansko matematičnih objektov ni in tako zlasti ne števil. Toda tukaj ne obstaja nobeno protislovje. Razlikovati moramo med jezikom Lay, v katerem matematiki oblikujejo svoje trditve, in jezikom *Lr*, *v* katerem jih oblikujejo nominalisti in drugi filozofi. Izjava (1) je oblikovana v *Lu*. Ampak

[5] Kakorkoli, težko je razumeti, kaj ta odvisnost ali konstitucija pomeni. Sodobnejše oblike intuicionizma so pogosto podale alternativni razvoj v obliki ne-klasične semantike za matematični jezik. Semantične teorije te vrste so si prizadevale zamenjati klasičen pojem resnice z epistemološko bolj prilagodljivim pojmom dokaza. Kjer klasični platonizem pravi, da je matematični stavek *S* resničen samo v primeru, če objekti, o katerih *S* govori, imajo lastnosti, ki jim jih *S* pripisuje, sedanja oblika intuicionizma pravi, da je *S* resničen (v nekem ustrezno lahkem smislu), samo v primeru, ko je *S* dokazljiv. Glej Wright 1992 in Dummett 1991b.

[6] Da bi poudarili nasprotje z realizmom resničnostnih vrednosti, se na platonizem in anti-nominalizem včasih nanašajo kot na oblike »predmetnega realizma«. To ni izraz, ki ga bom tukaj uporabil.

[7] En primer je »modalni strukturalizem« Hellmana iz leta 1989, kjer je aritmetični stavek *A* analiziran kot $\Box\forall X\forall f\forall x[PA^2(X/\mathbb{N}, f/s, x/0) \rightarrow A(X/\mathbb{N}, f/s, x/0)]$, kjer je PA^2 konjunkcija aksiomov Peanove aritmetike drugega reda.

nominalistična trditev, da je izjava (1) resnična, vendar abstraktnih objektov ni, je oblikovana v *Lr*. Nominalistična trditev je torej popolno koherentna pod pogojem, daje izjava (1) prevedena ne-homofono iz L_M v L_P. In res, ko nominalist trdi, da so resničnostne vrednosti stavkov iz L_M določene na način, ki se ne sklicuje na matematične objekte, ima v mislih točno to vrsto ne-homofonega prevoda. Stališče, ki je omenjeno v prejšnji opombi, nam priskrbi primer.

To kaže, da za to, da bi trditev o **Eksistenci** imela svoj mišljen učinek, mora biti izražena v jeziku L_P, ki ga uporabljamo filozofi. Če bi bila trditev izražena v jeziku L_M, ki ga uporabljajo matematiki, potem bi jo lahko nominalisti sprejeli, medtem ko bi še vedno zanikali, da obstajajo matematični objekti, v nasprotju z namenom trditve.

Majhna, vendar pomembna tradicija filozofov priganja, da je treba razpravo o platonizmu nadomestiti z, ali vsaj preoblikovati v, razpravo o realizmu resničnostne vrednosti. Eden od razlogov v podporo temu stališču je, da je prva razprava brezupno nejasna, medtem ko je druga bolj vodljiva (Dummett 1978a, str. 228-232 in Dummett 1991b, str. 10-15). Drugi razlog, ki ga ponujajo, je, da je razprava o realizmu resničnostne vrednosti bolj pomembna tako za filozofijo kot za matematiko, kot razprava o platonizmu.[8]

1.5 Matematični pomen platonizma

Delovni realizem je metodološko stališče, da mora biti matematika prakticirana tako, *kot da* bi bil platonizem resničen (Bernays 1935, Shapiro 1997, str. 21-27 in 38-44). To zahteva nekaj pojasnil. V razpravah o temeljih matematike je bil platonizem pogosto uporabljen za zagovor nekaterih matematičnih metod, kot so naslednje:

i. Klasični jeziki prvega reda (ali višjega), za čigar singularne izraze in kvantifikatorje se zdi, da se nanašajo na in segajo preko matematičnih objektov. (To je v nasprotju z jeziki, ki so prevladovali prej v zgodovini matematike, ki so se opirali bolj močno na konstruktivno in modalno besedišče).

ii. Klasična namesto intuicionistična logika.

iii. Ne-konstruktivne metode (kot ne-konstruktivni dokazi eksistence) in nekonstruktivni aksiomi (kot, na primer, aksiom izbire).

iv. Nepredikativne definicije (to so definicije, ki kvantificirajo preko celote, h kateri naj bi objekti, ki so definirani, pripadali).

[8] To je poanta *Kreislovega izreka*, ki se mnogokrat pojavlja v spisih Michaela Dummetta, na primer:
Kot je Kreisel pripomnil v recenziji Wittgensteina, »problem ni eksistenca matematičnih objektov, ampak objektivnost matematičnih izjav« (Dummett 1978b, str. xxxviii). Glej tudi Dummett 1981, str. 508.
Pripomba Kreisla, na katero je Dummett namigoval, se zdi, da je iz Kreisla 1958, str. 138, 1. op. (ki je, če je tako, precej manj znamenita kot Dummettovo parafraziranje). Za drugi primer stališča, da je realizem resničnostnih vrednosti pomembnejši od platonizma, glej Isaacson 1994.

v. »Hilbertov optimizem«, to je prepričanje, da je vsak matematični problem načeloma rešljiv.[9]

Glede na delovni realizem so te in druge klasične metode sprejemljive in na voljo v vseh matematičnih sklepanjih. Vendar delovni realizem ne zavzema stališča o tem, ali te metode zahtevajo katerikoli filozofski zagovor, in če je tako, ali mora ta zagovor temeljiti na platonizmu. Skratka, kjer je platonizem izrecno filozofsko stališče, je delovni realizem prvo in glavno stališče v matematiki sami o pravilni metodologiji te discipline. Platonizem in delovni realizem sta torej različni stališči.

Ali obstajajo katerekoli logične relacije med dvema stališčema? Glede na izvor delovnega realizma ni presenetljivo, da stališče prejema močno podporo od matematičnega platonizma. Predpostavimo, da je matematični platonizem resničen. Potem je jasno, da bi moral biti jezik matematike tak, kot je opisan v (i). Drugič, če je zagotovljeno, da je legitimno razmišljati klasično o kateremkoli neodvisno obstoječem delu realnosti, bi sledila tudi (ii). Tretjič, ker platonizem zagotavlja, da je matematika prej odkrita kot izumljena, naj pri matematikih ne bi bilo potrebe, da se omejijo na konstruktivne metode in aksiome, ki jih vzpostavlja (iii). Četrtič, obstaja močni in vplivni argument, ki ga dolgujemo Gödlu (1944), da so nepredikativne definicije legitimne, kadarkoli objekti, ki so definirani, obstajajo neodvisno od naših definicij. (Na primer, »najvišji fant v razredu« se zdi neproblematičen kljub temu, da je nepredikativen). Če je to res, potem bi sledila (iv). Nazadnje, če obstaja matematika o neki neodvisni obstoječi realnosti, potem ima vsak matematični problem edinstven in določen odgovor, ki zagotavlja vsaj nekaj motivacije za Hilbertov optimizem. (Glej tudi razpravo o *polnem platonizmu*, *v* razdelku 5.1.).

Resničnost matematičnega platonizma bi tako imela pomembne posledice znotraj matematike same. Upravičila bi klasične metode, ki so povezane z delovnim realizmom, in spodbujala iskanje novih aksiomov za reševanje vprašanj (kot je hipoteza kontinuuma), ki so ostala odprta pri naših trenutnih matematičnih teorijah.

Kakorkoli, delovni realizem na noben očiten način ne pomeni platonizma. Čeprav delovni realizem pravi, da smo upravičeni uporabljati platonistični jezik sodobne matematike, to ne zadošča za platonizem na vsaj dva načina. Kot je pokazala zgornja razprava o realizmu resničnostne vrednosti, je mogoče platonistični jezik matematike analizirati na tak način, da bi se izognili sklicevanju na matematične objekte in kvantifikaciji preko njih. Poleg tega, četudi bi bilo mogoče upravičiti takšne analize nominalne vrednosti matematičnega jezika, je to, kar bi naj sledilo, anti-nominalizem, vendar še ne platonizem. Dodatni argument bi bil potreben za tretjo komponento platonizma, in sicer **Neodvisnost**. Možnosti za tak argument obravnavamo v razdelku 3.2.

[9] Glej Hilbert 1996, str. 1102. Znano je, da je eden od problemov, ki jih postavlja Hilbert, hipoteza kontinuuma. Da bi bil ta problem »rešljiv«, mora imeti hipoteza kontinuuma objektivno resničnostno vrednost, kljub temu, da je neodvisna od standardne ZFC teorije množic.

2. Fregejev argument za eksistenco

Sledi vzorec argumenta za obstoj matematičnih objektov. Ker je bil prvi filozof, ki je razvil argument v tej splošni obliki, Frege, bomo ta argument imenovali *fregejevski argument*. Toda vzorec je splošen in odmisli najbolj specifične vidike Fregejevega lastnega zagovora eksistence matematičnih objektov, kot je njegovo stališče, da je aritmetiko mogoče zreducirati na logiko. Fregejev logicizem je samo en način, v katerem je lahko razvit ta vzorec; nekatere druge načine bomo omenili spodaj.

2.1 Struktura argumenta

Fregejevski argument temelji na dveh premisah, od katerih se prva nanaša na semantiko matematičnega jezika:

Klasična semantika.

> Singularni izrazi matematičnega jezika naj bi se nanašali na matematične objekte, njeni kvantifikatorji prvega reda pa naj bi segali preko takih objektov.

Besedo »naj bi« je treba razložiti. Ko naj bi se stavek S nanašal ali kvantificiral na določen način, to pomeni, da za to, da bi bil S resničen, mora S uspeti pri nanašanju ali kvantificiranju na ta način.

Druga premisa ne potrebuje veliko razlage:

Resnica.

> Večina stavkov, ki so sprejeti kot matematični teoremi, je resničnih (ne glede na njihovo sintaktično in semantično strukturo).

Razmislite o stavkih, ki so sprejeti kot matematični teoremi in vsebujejo enega ali več matematičnih singularnih izrazov. Po premisi **Resnica** je večina teh stavkov resničnih.[10] Naj bo S tak stavek. S **Klasično semantiko** resničnost stavka S zahteva, da so njegovi singularni izrazi uspešni pri nanašanju na matematične objekte. Zato morajo obstajati matematični objekti, kot je zatrjeno z **Eksistenco**.[11]

[10] Bodite pozorni na to, da ta korak uporablja oklepajno precizacijo v **Resnici**. Brez te precizacije bi bilo mogoče za večino stavkov, ki so bili sprejeti kot matematični izreki, da so resnični, in vsi stavki, ki so omenjeni v besedilu, da so lažni.

[11] Obstaja sorodni argument, ki je do intencionalnih dejanj, naperjenih na objekt, v enakem odnosu na način, v kakršnem je fregejevski argument do stavkov ali propozicij. (Glej Gödel 1964 in Parsons 1980).
(2) Ljudje imajo intuicije o matematičnih objektih.
(3) Te intuicije so verodostojne.
Iz teh premis ravno tako izhaja **Eksistenca**: kajti intuicija je lahko verodostojna zgolj tedaj, ko njen intencionalni objekt obstaja. Osredinili se bomo na originalni fregejevski argument, ker se zdi bolj vodljiv. Saj je lažje oceniti, ali je matematični stavek resničen, kot oceniti ali je matematična intuicija verodostojna.

2.2 Zagovor klasične semantike

Klasična semantika trdi, da se matematični jezik obnaša semantično zelo podobno jeziku na sploh (ali se vsaj tradicionalno domneva, da se obnaša): semantične funkcije singularnih izrazov in kvantifikatorjev so, da se, vsak zase, nanašajo na objekte in segajo preko objektov. To je na splošno empirična trditev o delovanjih pol-formalnega jezika, ki je bil rabljen v skupnosti poklicnih matematikov. (V široko sprejeti terminologiji Burgessa dz Rosena 1997, str. 6-7, je **Klasična semantika** *hermenevtična* trditev; to je opisna trditev o tem, kako je določen jezik dejansko rabljen, to ni normativna trditev o tem, kako naj bi bil rabljen ta jezik). Bodite pozorni tudi na to, da je **Klasična semantika** združljiva z večino tradicionalnih stališč o semantiki; zlasti je združljiva z vsemi standardnimi stališči o pomenih stavkov, in sicer, da so ti resničnostne vrednosti, propozicije, ali množice možnih svetov.

Klasična semantika uživa močno prima facie verodostojnost. Za matematični jezik se močno zdi, da ima enako semantično strukturo kot običajni ne-matematični jezik. Kot opaža Burgess (1999), se za naslednja dva stavka zdi, da imata enako preprosto semantično strukturo predikata, ki je pripisan subjektu (str. (4)

(4) Evelyn je lepa.

(5) Enajst je praštevilo.

Ta videz potrjuje standardna semantična analiza, ki jo predlagajo jezikoslovci in semantiki.

Klasično semantiko so kljub temu izzvali, na primer, nominalisti, kot sta Hellman (1989) in Hofweber (2005). To ni mesto za razširjeno razpravo o takšnih izzivih. Naj samo omenim, da je potrebnega veliko dela za utemeljitev te vrste izziva. Izzivalec bo moral dokazati, da so navidezne semantične podobnosti med matematičnim in ne-matematičnim jezikom varljive. In ti dokazi bodo morali biti take vrste, da jih bodo jezikoslovci in semantiki – brez ugotovljenega zanimanja za filozofijo matematike – lahko priznali kot pomembne[12]

2.3 Zagovor resnice

Resnico je mogoče zagovarjati na različne načine. Skupno vsem zagovorom je, da najprej identificirajo nek standard, s katerim so lahko resničnostne vrednosti matematičnih izjav ocenjene in potem dokazujejo, da matematični teoremi zadovoljujejo ta standard.

Ena možnost je, da se sklicujemo na standard, ki je bolj osnoven kot tisti od matematike same. Logicizem ponuja dober primer. Frege in drugi logicisti najprej trdijo, da je katerikoli teorem čiste logike resničen. Potem poskušajo

[12] Epistemološki holist bo trdil, da lahko načeloma dokaz za ali proti jezikovni analizi pride od koderkoli. Ni mi treba zanikati te trditve. Moja poanta je preprosto ta, da zadevna hipoteza pripada empiričnemu jezikoslovju in jo je treba obravnavati kot takšno.

pokazati, da je teoreme iz določenih vej matematike mogoče dokazati zgolj na podlagi čiste logike in definicij.

Druga možnost je, da se sklicujemo na standarde empirične znanosti. Quine-Putnamov argument iz neizogibnosti ponuja primer. Najprej se dokazuje, da je verjetno katerikoli nujni del empirične znanosti resničen in zato nekaj, kar smo upavičeni verjeti. Potem se dokazuje, da so velike količine matematike nujne za empirično znanost. Če sta obe trditvi pravilni, sledi, da je **Resnica** verjetno resnična, in da je verjetje o **Resnici** upravičeno.

Tretja možnost je, da se sklicujemo na standarde matematike same. Zakaj bi se nekdo želel sklicevati na ne-matematične standarde, kot so merila logike ali empirične znanosti, da bi zagovarjal resničnost matematičnih teoremov? Ko zagovarjamo resničnost trditev logike in fizike, se nam ni treba sklicevati na standarde zunaj logike in fizike. Raje predpostavimo, da logika in fizika ponujata svoj lasten *sui generis* standard upravičenja. Zakaj bi matematika bila kakorkoli drugačna? Ta tretja strategija je dobila veliko pozornosti v zadnjih letih, pogosto pod naslovom »naturalizem« ali »matematični naturalizem«. (Glej Burgess & Rosen 1997, Maddy 1997).

Tukaj je primer, kako lahko razvijemo naturalistično strategijo. Imenujmo držo, ki jo imajo matematiki do matematičnih teoremov, »sprejetje«. Potem se zdijo verjetne naslednje trditve:

> (6) Matematiki so upravičeni sprejemati teoreme matematike.
>
> (7) Sprejemanje matematične izjave S vključuje jemanje te izjave za resnično.
>
> (8) Ko matematik sprejema matematično izjavo S, je vsebina njegove naravnanosti na splošno dobeseden pomen izjave *S*.

Iz teh treh trditev sledi, da so matematični strokovnjaki upravičeni jemati matematične teoreme za dobesedno resnične. Z razširitvijo smo tudi mi upravičeni, da verjamemo o **Resnici**. Bodite pozorni na to, da samim strokovnjakom, s katerimi se ukvarja (6), ni treba verjeti o (7) in (8), niti jim ni treba, da so upravičeni o kakršnemkoli takem prepričanju. Kar je pomembno, je, da so te tri trditve resnične. Nalogi ugotavljanja resničnosti za (7) in (8) lahko pripadata jezikoslovcem, psihologom, sociologom ali filozofom, nikakor pa ne matematikom.

2.4 Pojem ontološke zavezanosti

Različice fregejevskega argumenta so včasih izjavljene v okviru pojma ontološke zavezanosti. Predpostavimo, da operiramo s standardnim quineovskim merilom ontološke zavezanosti:

Quineov kriterij

> Stavek prvega reda (ali zbirka takih stavkov) je ontološko zavezan takim objektom, za katere mora biti predpostavljeno, da so v dosegu spremenljivk, da bi stavek (ali zbirka stavkov) bila resnična.

Potem iz **Klasične semantike** sledi, da je veliko matematičnih stavkov ontološko zavezanih matematičnim objektom. Da bi to videli, bomo preučili tipični matematični teorem S, ki vsebuje nek običajni ekstenzionalni pojav bodisi singularnih izrazov bodisi kvantifikatorjev prvega reda. S **Klasično semantiko** naj bi se ti izrazi nanašali na ali segali preko matematičnih objektov. Zato, da je S resničen, morajo biti ti izrazi uspešni pri početju tistega, kar dozdevno počnejo. Zato, da je *S* resničen, morajo – posledično – obstajati matematični objekti v dosegu spremenljivk. S **Quineovim kriterijem** to pomeni, da je S ontološko zavezan matematičnim objektom.

Quine in še mnogi drugi jemljejo, da je **Quineov kriterij** nekaj več kot definicijo izraza »ontološka zavezanost« (Quine 1969 in Burgess 2004). Vendar so kriterij kljub temu spodbijali. Nekateri filozofi zanikajo, da singularni izrazi in kvantifikatorji prvega reda samodejno povzročijo ontološke zavezanosti. Morda to, kar »se zahteva od sveta« zato, da bi bil stavek resničen, vsebuje eksistenco nekaterih, vendar ne vseh objektov v dosegu kvantifikatorjev (Rayo 2008). Ali pa bi morali pretrgati povezavo med eksistencialnim kvantifikatorjem prvega reda in pojmom ontološke zavezanosti (Azzouni 2004 in Hofweber 2000).

En odziv na te izzive je opozoriti, da smo zgoraj razvili fregejevski argument brez katerekoli uporabe izraza »ontološka zavezanost«. Vsakršno spodbijanje definicije »ontološke zavezanosti«, ki jo ponuja **Quineov kriterij**, se zato zdi nebistveno za tisto različica fregejevskega argumenta, ki smo jo razvili zgoraj. Za ta odziv seveda ni verjetno, da zadošča izzivalcem, ki bodo odgovorili, da je sklep zgoraj razvitega argumenta prešibek, da bi imel svoj mišljeni učinek. Spomnimo se, da je sklep, **Eksistenca**, formaliziran v našem filozofskem metajeziku, *L?*, kot »$\exists xMx$«. Torej ta formalizacija ne bo mogla imeti svojega mišljenega učinka, razen če je ta meta-jezikovni stavek take vrste, da si naprti ontološko zavezanost. Ampak to je natanko tisto, čemur izzivalci oporekajo. Temu sporu tu ne moremo slediti še naprej. Za zdaj pripomnimo, da izzivalcem ni treba ponuditi razlage, zakaj je njihov nestandardni pojem ontološke zavezanosti boljši in teoretično bolj zanimiv kot standardni Quineov pojem.

3. Od eksistence k matematičnemu platonizmu

Spomnimo se, da je matematični platonizem rezultat tega, da **Eksistenci** dodamo dve nadaljnji trditvi, **Abstraktnost** in **Neodvisnost**.

3.1 Abstraktnost

S standardi filozofije je **Abstraktnost** ostala razmeroma nesporna. Med neka filozofov, ki jo želijo spodbiti, spadata Maddy (1990) (kar se tiče nečisti množic) in Bigelow (1988) (kar se tiče množic in različnih vrst števil). To relativno pomanjkanje razprave pomeni, da je bilo razvitih malo izrecnih zagovorov **Abstraktnosti**. Ampak ni težko razumeti, kako lahko tak zagovor poteka. Tukaj je ena ideja. Verodostojen je *prima facie* pritisk na katerokoli filozofsko razlago

matematičnega postopka, da bi se moral izogniti pripisovanju katerihkoli značilnosti matematiki, ki bi naredila dejanski matematični postopek za napačen ali neustrezen. Ta pritisk povzroča, da je težko zanikati, da so objekti čiste matematike abstraktni. Kajti če bi ti objekti imeli prostorsko-časovne lokacije, potem bi bil dejanski matematični postopek zgrešen in neustrezen, ker bi se potem morali čisti matematiki ukvarjati z lokacijami svojih objektov, prav tako kot se fiziki ukvarjajo z lokacijami svojih objektov. Dejstvo, da čisti matematiki ne kažejo nobenega zanimanja za to vprašanje, predlaga, da so njihovi objekti abstraktni.

3.2 Neodvisnost

Neodvisnost pravi, da so matematični objekti, če obstajajo, neodvisni od razumnih bitij in njihovega jezika, mišljenja in postopkov. V zadnjih desetletjih je ta trditev prejela malo izrecne pozornosti. (Med izjemami so filozofi intuicionističnih in konstruktivističnih nagnjenj, kot je Dummett). Za trditev se zdi, da jo je tiho sprejela večina analitičnih filozofov, ne pa vedno zato, ker jih ganejo argumenti v njeno korist, temveč pogosto samo zato, ker filozofi ne razumejo, kaj bi se zgodilo, če bi bila neuspešna. Običajni fizični objekti ponujajo dober model za to, kaj za objekt pomeni, da je neodvisen od nas in naših dejavnosti. Ampak še vedno ni jasno, kaj bi za objekt pomenilo, da ne bi bil tako neodvisen. Kakorkoli že, neuspeh, da bi videli kakršnokoli jasno alternativo, ni zagovor tega stališča.

Ali lahko naredimo kaj boljšega? Ena strategija je iskanje poti od delovnega realizma k **Neodvisnosti**. Predpostavimo, da je metodologija klasične matematike upravičena. Ali je mogoče, da je najboljša razlaga tega dejstva, da je **Neodvisnost** resnična? Enega takih argumentov je predlagal Godel, ki trdi, da legitimnost nepredikativnih definicij najbolje razloži resnica neke oblike platonizma, vključno z nečim, kot je naša trditev o **Neodvisnosti** (Godel 1944, str. 455-457, glej tudi Bernays 1935 za sorodno, vendar šibkejšo trditev). Kakorkoli že, četudi obstaja široko soglasje, da bi **Neodvisnost** podprla legitimnost nepredikativnih definicij, ostaja odprto vprašanje, ali je mogoče zagovarjati nasprotno implikacijo.

Druga možnost je, da nadaljujemo od metodologije sodobne teorije množic k **Neodvisnosti** (Godel 1964). Velik del iskanja novih aksiomov v teoriji množic danes temelji na tako imenovanih »zunanjih upravičenjih«, kjer so kandidati za aksiome ocenjeni ne le glede na njihovo notranjo verodostojnost, temveč tudi glede na njihovo sposobnost pojasnjevanja in sistematiziranja bolj osnovnih matematičnih dejstev. Morda je to metodologijo mogoče uporabiti za utemeljitev **Neodvisnosti**. Kakorkoli že, ostaja odprto vprašanje, ali se lahko ta predlog razvije v prepričljiv argument. (Glej Maddy 1988 za razpravo o zunanjih upravičenjih v teoriji množic. Glej tudi Parsons 1995 za razpravo o Gödlovem platonizmu).

4. Ugovori proti matematičnemu platonizmu

Razviti so bili različni ugovori proti matematičnemu platonizmu. Najpomembnejši so naslednji:

4.1 Epistemološki dostop

Najbolj vplivni ugovor je verjetno tisti, ki se zgleduje po Benacerrafu (1973). Kar sledi, je izboljšana različica Benacerrafovega ugovora po Fieldu (1989).[13] Ta različica temelji na naslednjih treh premisah.

Premisa 1. Matematiki so zanesljivi v smislu, da za skoraj vsak matematični stavek S, če matematiki sprejmejo *S*, velja, da je potem S resničen.

Premisa 2. Da bi bilo prepričanje v matematiko upravičeno, mora biti vsaj načelno možno razložiti zanesljivost, ki je opisana v premisi 1.

Premisa 3. Če je matematični platonizem resničen, potem te zanesljivosti ni mogoče razložiti niti v načelu.

Če so te tri premise pravilne, bo iz tega sledilo, da matematični platonizem spodrezuje naša upravičenja za prepričanje v matematiki.

Toda ali so premise pravilne? Prvi dve premisi sta razmeroma nesporni. Večina platonistov je že zavezana premisi 1. In premisa 2 se zdi dokaj varna. Če zanesljivosti nekega postopka izoblikovanja prepričanja ni mogoče razložiti niti v načelu, potem bi se zdelo, da postopek deluje zgolj po naključju in tako spodrezuje vsakršno upravičenje, ki ga imamo za na tak način ustvarjena prepričanja. Premisa 3 je bolj sporna. Field zagovarja to premiso s pripombo, da so »resničnostne vrednosti naših matematičnih trditev odvisne od dejstev, ki vsebujejo platonistične bitnosti, ki bivajo na področju zunaj prostora-časa« (Field 1989, str. 68), in so tako vzročno celo v načelu ločene od nas. Ta zagovor kajpada predpostavlja, da mora katerakoli ustrezno razlaga zadevne zanesljivosti vključiti neko vzročno korelacijo. O tem so podvomili različni filozofi, ki so predlagali bolj minimalne razlage trditve o zanesljivosti. (Glej Burgess dz Rosen 1997, str. 41-49 in Lewis 1991, str. 111-112. Glej Linnebo 2006 za kritiko).[14]

[13] Dve razliki med Benacerrafovimi in Fieldovimi argumenti si zaslužita omembe. Prvič, Fieldov argument je skrbno formuliran, tako da se izogne kakršnemkoli sklicevanju na problematične vzročne teorije vednosti. Drugič, v nasprotju s Fieldom, Benacerraf ne šteje svojega argumenta za ugovor proti matematičnemu platonizmu, ampak prej za dilemo. Ena zaželena stvar v filozofiji matematike je enotna semantika za matematični in ne-matematični jezik. Druga zaželena stvar je verodostojna epistemologija matematike. Če sprejemamo matematični platonizem, zadoščamo prvi zaželeni stvari, ne pa drugi. Če, po drugi strani, zavračamo matematični platonizem, zadoščamo drugi zaželeni stvari, vendar ne prvi.

[14] Tudi, če se za premiso 3 izkaže, da jo je mogoče zagovarjati, ne more biti nič več tako, ko »anti-nominalizem« nadomestimo z »matematičnim platonizmom«. Razprava v razdelku 5.2 ponuja nekakšen razlog za dvom o tej spremenjeni različici premise 3. Glej tudi Linnebo 2006, razdelek 5.

4.2 Metafizični ugovor

Drugi znameniti Benacerrafov članek razvija metafizični ugovor proti matematičnemu platonizmu (Benacerraf 1965, Kitcher 1978). Čeprav se Benacerraf osredinja na aritmetiko, se ugovor naravno posplošuje na najbolj čiste matematične objekte.

Benacerraf začne z zagovorom tistega, kar je zdaj znano kot strukturalistično stališče o naravnih številih, v skladu s katerim naravna števila nimajo lastnosti, razen tistih, ki jih imajo zaradi obstoječih pozicij v w-zaporedju. Na primer, ne obstaja nič več za biti število 3, kot imeti neke znotraj-strukturalno definirane relacijske lastnosti, takšne, kot so: biti naslednik od 2, biti polovica od 6 in biti praštevilo. Ne glede na to, kako pridno preučujemo aritmetiko in teorijo množic, ne bomo nikoli vedeli, ali je število 3 identično s četrtim von Neumannovim ordinalom ali z ustreznim Zermelovim ordinalom ali morda, kot je predlagal Frege, z množico vseh množic s tremi člani (v nekem sistemu, ki dopušča, da take množice obstajajo).

Benacerraf tako izpelje naslednjo ugotovitev:

> Števila torej sploh niso objekti, ker pri podajanju lastnosti ... števil, le opredelite abstraktno strukturo – razlika pa je v dejstvu, da 'elementi' strukture nimajo lastnosti, razen tistih, ki jih povezujejo z drugimi 'elementi' enake strukture (Benacerraf 1965, str. 291).

Z drugimi besedami, Benacerraf trdi, da ne morejo obstajati objekti, ki nimajo nič drugega kot zgolj strukturalne lastnosti. Vsi objekti morajo imeti tudi neke ne-strukturalne lastnosti. (Glej Benacerrafa 1996 za nekatera kasnejša razmišljanja o tem argumentu).

Oba koraka Benacerrafovega argumenta sta sporna. Prvi korak – da imajo naravna števila samo strukturalne lastnosti – so nedavno zagovarjali razni matematični strukturalisti (Parsons 1990, Resnik 1997 in Shapiro 1997). Ampak ta korak zanikajo logicisti in neo-logicisti, ki trdijo, da so naravna števila sama po sebi vezana na kardinalnosti množic, ki jih štejejo. In drugi korak – da ne morejo obstajati objekti s samo strukturalnimi lastnostmi – izrecno zavračajo vsi strukturalisti, ki zagovarjajo prvi korak. (Za nekatera mnenja, ki simpatizirajo z drugim korakom, glej Hellman 2001 in MacBride 2005. Glej tudi Linnebo 2008 za razpravo).

4.3 Drugi metafizični ugovori

Poleg Benacerrafovega so razvili razne metafizične ugovore proti matematičnemu platonizmu. Eden od bolj znanih primerov je argument Nelsona Goodmana proti teoriji množic. Goodman (1956) zagovarja *načelo nominalizma*, ki določa, da sta dve bitnosti identični, kadarkoli imata enake osnovne komponente. To načelo lahko štejemo za okrepitev znanega aksioma ekstenzionalnosti iz teorije množic. Aksiom ekstenzionalnosti določa, da če imata dve množici x in y enake elemente – to je, če $u(u \in x \leftrightarrow u \in y)$ – potem sta identični. Načelo nominalizma dobimo, če relacijo članstva nadomestimo z

njenim tranzitivnim zaprtjem.[15] To načelo tako določa, da če x in y podpirajo $\in^*$ isti individuumi – to je, če $u(u \in x \leftrightarrow u \in y)$ – potem sta x in y identična. Pri zagovarjanju tega načela Goodman ne odobrava sestave množic in razredov, odobrava le sestavo mereoloških vsot in uporabo standardnih mereoloških operacij (kot jih je opisal s svojim »računom individuumov«).

Kakorkoli že, za Goodmanov zagovor načela nominalizma zdaj široko velja, da je neprepričljiv, kot priča to, da filozofi in matematiki široko sprejemajo teorijo množic kot legitimno in pomembno vejo matematike.

5. Lažje oblike platonizma

Anti-nominalizem pravi, da obstajajo abstraktni matematični objekti, medtem ko platonizem dodaja **Neodvisnost**, ki pravi, da so matematični objekti neodvisni od razumnih bitij in njihovega jezika, mišljenja in postopkov. Alternative so na voljo; ta zadnji razdelek pregleduje nekatere lažje oblike platonizma, ki spadajo nekje v območje med anti-nominalizmom in polnokrvnim platonizmom.

5.1 Polnostni platonizem

Ena lažja oblika platonizma (ne glede na njegovo ime) je »polnokrvni platonizem« Balaguerja 1998. Ta oblika platonizma je označena z *načelom polnosti* v smislu, da katerikoli matematični objekti, ki bi lahko obstajali, dejansko obstajajo. Na primer, ker je *hipoteza kontinuuma* neodvisna od standardne aksiomatizacije teorije množic, obstaja univerzum množic, v katerem je hipoteza resnična, in drugi, v katerem je neresnična. In noben univerzum ni na kakršenkoli način privilegiran. V nasprotju s tem tradicionalni platonizem trdi, da obstaja edinstven univerzum množic, v katerem je hipoteza kontinuuma bodisi dokončno resnična ali dokončno neresnična.

Ena domnevna korist za to polnostno stališče je v epistemologiji matematike. Če je vsaka konsistentna matematična teorija resnična za nek univerzum matematičnih objektov, potem bo v nekem smislu lahko pridobiti matematično vednost: pod pogojem, da so naše matematične teorije konsistentne, so zagotovljeno resnične za nek univerzum matematičnih objektov.

»Polnokrvni platonizem« je kajpada doživel veliko kritik. Colyvan in Zalta 1999 ga kritizirata zaradi spodkopavanja možnosti nanašanja na matematične objekte, Restall 2003 pa zaradi pomanjkanja natančne in koherentne formulacije načela polnosti, na katerem to stališče temelji. Martin (2001) predlaga, da naj bi različne univerzume množic združili, da bi dobili en sam maksimalni univerzum, ki bo privilegiran s tem, da ustreza našemu pojmovanju množice bolj kot katerikoli drugi univerzum množic.

[15] *Tranzitivno zaprtje* relacije R je najmanjša tranzitivna relacija S, ki vsebuje R. Tranzitivno zaprtje relacije je včasih znano tudi kot predhodnik te relacije.

Drugačno različico polnostnega platonizma sta razvila Linsky dc Zalta 1995 ir v vrsti nadaljnjih člankov. (Glej, na primer, Linsky & Zalta 2006 in druge članke, ki so tam navedeni). Tradicionalni platonizem deluje narobe pri »dojemanju abstraktnih objektov na modelu fizičnih objektov« (Linsky & Zalta 1995, str. 533), posebej vključno z idejo, da so taki objekti »redki«, ne pa polni. Linsky Zalta razvijata alternativni pristop na podlagi Zaltove »predmetnostne teorije«. Glavna značilnost predmetnostne teorije je zelo splošno načelo razumevanja, ki zatrjuje eksistenco polnosti abstraktnih objektov: za katerokoli zbirko lastnosti, obstaja abstraktni objekt, ki »vkodira« natančno te lastnosti. Nadalje, v predmetnostni teoriji sta dva abstraktna objekta identična, če in samo če vkodirata natančno enake lastnosti. Za predmetnostno teorijsko načelo razumevanja in identični kriterij je rečeno, da »ponujata povezavo med našimi kognitivnimi zmožnostmi razumevanja in abstraktnimi objekti« *(ibid.*, str. 547). (Glej Ebert z Rossberg 2007 za kritično razpravo).

5.2 Lažje semantične vrednosti

Predpostavimo, da je anti-nominalizem resničen. Zaradi primernosti predpostavimo tudi **Klasično semantiko**. Te predpostavke zagotavljajo, da se singularni izrazi in kvantifikatorji matematičnega jezika nanašajo na in segajo preko abstraktnih objektov. Glede na te predpostavke, ali bi morali biti tudi matematični platonisti? To se pravi, ali objekti, na katere se matematični stavki nanašajo in kvantificirajo preko, izpolnjujejo **Neodvisnost** ali nek podobni pogoj?

Koristno bo, če naše predpostavke znova izpovemo v bolj nevtralnih izrazih. To lahko naredimo s sklicevanjem na pojem *semantične vrednosti*, ki igra pomembno vlogo pri semantiki in filozofiji jezika. Na teh področjih se široko predpostavlja, da vsak izraz jasno prispeva k resničnostni vrednosti stavkov, v katerih se izraz pojavlja. Ta prispevek je znan kot *semantična vrednost* izraza. Splošno se predpostavlja, da je (vsaj v razširjenem kontekstu) semantična vrednost singularnega izraza samo njegov referent.

Naše predpostavke lahko zdaj izrečemo nevtralno kot trditev, da imajo matematični singularni izrazi abstraktne semantične vrednosti in da njena kvantifikatorja segata preko vrst zadev, ki rabijo kot semantične vrednosti. Naj se osredinimo na trditev o singularnih izrazih. Kaj je filozofski pomen te trditve? Zlasti še, ali ta podpira nekatere različice **Neodvisnosti**? Odgovor bo odvisen od tega, kar se zahteva, da bi matematični singularni izraz imel semantično vrednost.

Nekateri filozofi trdijo, da se ne zahteva veliko (Frege 1953, Dummett 1981, Dummett 1991a, Hale in Wright 2000 in Wright 1983). Za izraz *t* zadostuje, da jasno prispeva k resničnostnim vrednostim stavkov, v katerih se pojavlja. Celoten namen pojma semantične vrednost je bil predstaviti take prispevke. Za singularni izraz potemtakem zadostuje, da ima semantično vrednost, da naredi nek tak primeren prispevek.

To lahko celo odpre pot za nekakšen redukcionizem (Dummett 1991a). Čeprav je popolnoma resnično, da ima matematični singularni izraz *t* abstraktni objekt za svojo semantično vrednost, to resnico mogoče dobi na podlagi bolj osnovnih dejstev, ki ne omenjajo ali vključujejo ustreznega abstraktnega objekta. Primerjajte, na primer, relacijo lastništva, ki obstaja med osebo in njenim bančnim računom. Čeprav je popolnoma res, da oseba ima bančni račun, ta resnica mogoče obstaja zaradi bolj osnovnih sociooloških in psiholoških dejstev, ki ne omenjajo ali vključujejo bančnega računa.

Če je mogoče zagovarjati neko lažjo razlago semantičnih vrednosti, lahko sprejmemo predpostavke anti-nominalizma in **Klasične semantike**, ne da bi se zavezali katerikoli tradicionalni ali močni obliki platonizma.

5.3 Kaj je vendar matematični platonizem?

Ali si te lažje oblike platonizma zaslužijo, da jih imenujemo »platonistične«? Ker ta stališča jasno opredelimo kot anti-nominalistična, je vprašanje, ali so dovolj resnična za trditev o **Neodvisnosti**.

Naravna razlaga **Neodvisnosti** je protidejstveno pogojna, da če ne bi bilo nobenih razumnih bitij ali če bi bil njihov jezik, mišljenje ali postopki drugačni, bi še vedno obstajali matematični objekti. Če je to vse, kar pomeni **Neodvisnost**, potem so lažje oblike platonizma verjetno izpolnile trditev in se tako kvalificirale kot pristni platonizem.

Vendar je dvomljivo, da je ta razlaga sprejemljiva. Kajti za **Neodvisnost** se meni, da bi morala utemeljiti analogijo med matematičnimi objekti in običajnimi fizičnimi objekti. Tako kot elektroni in planeti obstajajo neodvisno od nas, obstajajo tudi števila in množice. In tako kot izjave o elektronih in planetih naredijo za resnične ali neresnične objekti, s katerimi se ukvarjajo, in popolnoma objektivne lastnosti teh objektov, to naredijo izjave o številih in množicah. Ker se lažje oblike platonizma izrecno distancirajo od te analogije, bi bila **Neodvisnost** verjetno razložena na način, ki jo dela nezdružljivo z lažjimi oblikami platonizma.

Problem je zmuzljiva narava analogije, na kateri temelji **Neodvisnost**. Dokler ne ustvarimo primernejšega razumevanja te analogije, bo ostalo nejasno, kako naj bi platonizem natanko presegal anti-nominalizem.

Bibliografija

Azzouni, Jody, 2004, *Deflating Existential Consequence: A Case for Nominalism,* Oxford: Oxford University Press.

Balaguer, Mark, 1998, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics,* Oxford: Oxford University Press.

Benacerraf, Paul, 1965, "What numbers could not be", *Philosophical Review,* 74: 47-73.

Benacerraf, Paul, 1973, "Mathematical Truth", *Journal of Philosophy*, 70(19): 661-679.

Benacerraf, Paul, 1996, "What mathematical truth could not be, i", v *Benacerraf and His Critics*, A. Morton and S. Stich, eds., Oxford: Blackwell.

Benacerraf, Paul and Putnam, Hilary (eds.), 1983, *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge: Cambridge University Press. Second edition.

Bernays, Paul, 1935, "On Platonism in Mathematics", ponatis v Benacerraf and Putnam (1983).

Bigelow, John, 1988, *The Reality of Numbers: A Physicalist's Philosophy of Mathematics*, Oxford: Clarendon.

Burgess, John P., 1999, "Review of Stewart Shapiro, Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40(2): 283-91.

Burgess, John P., 2004, "Review of Jody Azzouni, Deflating Existential Consequence: A Case for Nominalism", *Bulletin of Symbolic Logic*, 10(4): 573-577.

Burgess, John P. and Rosen, Gideon, 1997, *A Subject with No Object*, Oxford: Oxford University Press.

Colyvan, Mark and Zalta, Edward N., 1999, "Mathematics: Truth and Fiction?", *Philosophia Mathematica*, 7(3): 336-349.

Dummett, Michael, 1978a, "The philosophical basis of intuitionistic logic", v *Truth and Other Enigmas*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 215-247. Reprinted in Benacerraf and Putnam (1983).

Dummett, Michael, 1978b, *Truth and Other Enigmas*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

Dummett, Michael, 1981, *Frege: Philosophy of Language*, Cambridge, MA: Harvard University Press, second ed.

Dummett, Michael, 1991a, *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

Dummett, Michael, 1991b, *The Logical Basis of Metaphysics*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

Ebert, Philip and Rossberg, Marcus, 2007, "What is the purpose of neo-logicism?", *Travaux de Logique*, 18: 33-61.

Field, Hartry, 1989, *Realism, Mathematics, and Modality*, Oxford: Blackwell.

Frege, Gottlob, 1953, *Foundations of Arithmetic*, Oxford: Blackwell. Prevod J.L. Austin.

Godel, Kurt, 1944, "Russell's Mathematical Logic", v Benacerraf and Putnam (1983).

Godel, Kurt, 1964, "What is Cantor*s Continuum Hypothesis?", v Benacerraf and Putnam (1983).

Godel, Kurt, 1995, "Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications", in *Collected Words,* S. Feferman et al, ed., Oxford: Oxford University Press, vol. III, 304-323.

Goodman, Nelson, 1956, "A World of Individuals", ponatis v in P. Benacerraf and H. Putnam, eds., Philosophy of Mathematics: Selected Readings, 1st ed., Prentice-Hall.

Hale, Bob, 1987, *Abstract Objects,* Oxford: Blackwell.

Hale, Bob and Wright, Crispin, 2000, "Implicit Definition and the A Priori", v *New Essays on the A Priori*, Paul Boghossian and Christopher Peacocke, eds., Oxford: Oxford University Press. Ponatis v Hale and Wright (2001).

Hale, Bob and Wright, Crispin, 2001, *Reason's Proper Study,* Oxford: Clarendon.

Hellman, Geoffrey, 1989, *Mathematics without Numbers*, Oxford: Clarendon.

Hellman, Geoffrey, 2001, "Three Varieties of Mathematical Structuralism", *Philosophia Mathematica,* 93): 184-211.

Hilbert, David, 1996, "Mathematical problems", v *From Kant to Hilbert,* William Ewald, ed., Oxford: Oxford University Press, vol. 2, 1096-1105.

Hofweber, Thomas, 2000, "Quantification and non-existent objects", v *Empty Names, Fiction and the Puzzle of Non-Existence*, Anthony Everett and Thomas Hofweber, eds., Stanford, CA: CSLI Publications, 249-73.

Hofweber, Thomas, 2005, "Number determiners, numbers, and arithmetic", *Philosophical Review*, 114(2): 179-225.

Isaacson, Daniel, 1994, "Mathematical intuition and objectivity", v *Mathematics and Mind*, Alexander George, ed., Oxford: Oxford University Press, chap. 5.

Kitcher, Philip, 1978, "The plight of the platonist", *Nods,* 12:119-136.

Kreisel, Georg, 1958, "Review of Wittgenstein's remarks on the foundations of mathematics", *British Journal for the Philosophy of Science*, 9: 135-158.

Lewis, David, 1991, *Parts of Classes,* Oxford: Blackwell.

Linnebo, Øystein, 2006, "Epistemological Challenges to Mathematical Platonism", *Philosophical Studies*, 129(3): 545-574.

Linnebo, Øystein, 2008, "Structuralism and the Notion of Dependence", *Philosophical Quarterly*, 58: 59-79.

Linsky, Bernard and Zalta, Edward N., 1995, "Naturalized platonism versus platonized naturalism", *Journal of Philosophy,* 92(10): 525-555.

Linsky, Bernard and Zalta, Edward N., 2006, "What is neologicism?", *Bulletin of Symbolic Logic,* 12(1): 60-99.

MacBride, Fraser, 2005, "Structuralism Reconsidered", v *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Stewart Shapiro, ed., Oxford: Clarendon, 563-589.

Maddy, Penelope, 1988, "Believing the axioms, i and ii", *Journal of Symbolic Logic*, 53: 481-511 and 736-764.

Maddy, Penelope, 1990, *Realism in Mathematics*, Oxford: Clarendon.

Maddy, Penelope, 1997, *Naturalism in Mathematics*, Oxford: Clarendon.

Martin, Donald A., 2001, "Multiple universes of sets and indeterminate truth values", *Topoi*, 20(1): 5-16.

Parsons, Charles, 1980, "Mathematical Intuition", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 80: 145-68.

Parsons, Charles, 1983, *Mathematics in Philosophy*, Ithaca, NY: Cornell University Press.

Parsons, Charles, 1990, "The Structuralist View of Mathematical Objects", *Synthese*, 84: 303-346.

Parsons, Charles, 1995, "Platonism and mathematical intuition in Kurt Godel's thought", *Bulletin of Symbolic Logic*, 1(1): 44-74.

Quine, W.V., 1969, "Existence and quantification", v *Ontological Relativity and Other Essays*, New York: Columbia University Press, 91-113.

Rayo, Agustin, 2008, "On specifying truth-conditions", *Philosophical Review*, 117(3): 385-443.

Rees, D. A., 1967, "Platonism and the platonic tradition", v *The Encyclopedia of Philosophy*, Paul Edwards, ed., New York: Macmillan, vol. 5, 333-341.

Resnik, Michael, 1980, *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Ithaca, NY: Cornell University Press.

Resnik, Michael, 1997, *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford: Oxford University Press.

Restall, Greg, 2003, "Just what Is full-blooded platonism?", *Philosophia Mathematica*, 11(1): 82-91.

Shapiro, Stewart, 1997, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford: Oxford University Press.

Wright, Crispin, 1983, *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen: Aberdeen University Press.

Wright, Crispin, 1992, *Truth and Objectivity*,t Cambridge, MA: Harvard University Press.