ANαliZA

časopis za kritično misel

Letnik 15, številka 1-2, avgust 2011 · ISSN 1408-2969

FILOZOFIJA MATEMATIKE

Majda Trobok

Uvod

prevedla Iris Merkač

Filozofska fakulteta Univerze na Reki

Citiranje: Majda Trobok, »Uvod«, *Analiza: časopis za kritično misel* 15, št. 1-2 (2011): 105–126.

Prevod. Licenca Creative Commons, ki velja za arhiv revije, za prevode ne velja; pravice izvirnika pripadajo njegovim imetnikom.

Izdajatelj: Društvo za analitično filozofijo in filozofijo znanosti, Ljubljana.

Elektronska različica je bila leta 2026 rekonstruirana iz skena tiskane izdaje (OCR, ročno pregledano) in preverjena s tiskano izdajo. Številke strani ustrezajo tiskani izdaji; prelomi strani znotraj prispevka se lahko nekoliko razlikujejo.

Majda Trobok
Filozofska fakulteta Univerze na Reki

Uvod*

Prevedla Iris Merkač

1. Razprava realizem – anti-realizem

Razprava realizem -anti-realizem v filozofiji matematike ponazarja razpravo, ki se pojavlja na številnih diskurzivnih področjih. Možno je biti realist glede na katerokoli vrsto stvari, katerokoli vrsto dejstva ali katerokoli stanje stvari: estetskih lastnosti, moralnih lastnosti, univerzalij, prostorsko in časovno umeščenih objektov in tako naprej. Na splošno, biti realist glede na objekte določene domene pomeni trditi, da ti objekti obstajajo objektivno, neodvisno od nas, naših prepričanj, konstrukcij in naših jezikovnih in spoznavnih postopkov, da so naša prepričanja o teh objektih *objektivno* resnična ali neresnična, in, v glavnem, da so ta prepričanja resnična.

Nasprotno, anti-realizem glede takih objektov nasprotuje tej njihovi karakterizaciji.

Tako karakteriziran realizem o neki domeni ima dve glavni sestavini; primerno je, da imamo zanju posebne izraze. Prva sestavina realizma – ideja, da zadevi ' objekti obstajajo neodvisno od naših prepričanj, konvencij, naših matematični postopkov in tako naprej – se pogosto imenuje »realizem o ontologiji« hi »znanstveni realizem« ali »notranji realizem«. Zadnja dva izraza bom prezrla in to sestavino preprosto imenovala »realizem o ontologiji«. Druga sestavina realizma – ideja, da so izjave o teh objektih objektivno resnične ali neresnične neodvisno od naše zmožnosti določanja resničnostnih vrednosti teh izjav – se pogosto imenuje »realizem o resničnostni vrednosti« ali »metafizični realizem« ali »zunanji realizem«.[1] Ponovno bom uporabila prvi navedeni izraz, »realizem o resničnostni vrednosti«, na račun zadnjega.

Trenutni razmislek kaže, da kombiniranje »realizma o ontologiji« z »realizmom o resničnostni vrednosti« prinaša samo »realizem«, kot je pravkar označen, če je »realizmu o resničnostni vrednosti« dana močna interpretacija. Pri šibki interpretaciji ta nauk preprosto pravi, da so izjave glede zadevnih objektov objektivno resnične ali neresnične, in zato neodvisno od naših prepričanj. V tem

* Prevedeno po Majda Trobok, *Platonism in the Philosophy of Mathematics*, Rijeka: Faculty of Arts and Sciences, str. 8–14 in 28–46.

[1] Brown (1999), str. 149–150; Shapiro (1997), str. 37.

smislu je nauk kajpada združljiv z domnevo, da so *vsa* naša prepričanja o teh objektih neresnična. Nasprotno, pri močni interpretaciji »realizma o resničnostni vrednosti« velja, da so izjave glede zadevnih objektov objektivno resnične ali neresnične, v *skladu (v glavnem)* z *našimi prepričanji, glede na katera obstajajo.* Ker je bil »realizem« definiran kot tisti, ki vključuje stališče, da so naša prepričanja o zadevnih objektih na splošno resnična, mora biti »realizmu o resničnostni vrednosti« dana ta močna interpretacija, če naj se kombinira z realizmom o ontologiji, da bi prinesel realizem *po sebi*.

Realizem v filozofiji matematike

Realizem v filozofiji matematike odseva splošno karakterizacijo pravkar danega realizma. Ko se nanaša na matematični primer, realizem v ontologiji pomeni idejo, da matematični objekti obstajajo neodvisno od naših prepričanj, konvencij, našega matematičnega postopka in tako naprej, medtem ko realizem o resničnostni vrednosti, podobno, pomeni idejo, da so matematične izjave objektivno resnične ali neresnične, neodvisno od naše zmožnosti določanja njihove resničnostne vrednosti in (pri močni interpretaciji) na splošno v skladu z našimi prepričanji. Na žalost se terminologija ponovno spreminja in nekateri filozofi matematike, kot je Dummett, ohranijo izraz »realizem« za to zadnje stališče. Dummett pravzaprav enači »realizem« v filozofiji matematike z realizmom o resničnostni vrednosti v *šibkem smislu.*

Zdi se, da je istovetenje »realizma« s še bolj močno različico realizma o resničnostni vrednosti neskladno; tako je še posebej njegovo istovetenje s šibko različico realizma o resničnostni vrednosti. Ko enkrat sprejmemo tako klasifikacijo, se bodo stališča, ki so bila tradicionalno obravnavana kot antirealistična, izkazala za različice realizma. Primer utegne biti nominalistična teorija[2] Hartryja Fielda, ki trdi, da je matematika objektivno neresnična. Ta teorija je realizem o resničnostni vrednosti v šibkem smislu in zato v skladu z zadevno razvrstitveno shemo realizem. Ampak zelo malo filozofov matematike bi mislilo, da je Fieldova teorija »realistična«. Pravzaprav je njena klasifikacija kot taka v nasprotju z običajno rabo (in zato zdravim razumom).

Podobno poanto bi lahko naredili proti predlogu za istovetenje »realizma« v filozofiji matematike z realizmom o resničnostni vrednosti pod močno interpretacijo, to je, tako da matematične izjave niso samo objektivno resnične ali neresnične, ampak samo neresnične, ko ne verjamemo, da so resnične. Ena od teorij, ki je realistična o resničnostni vrednosti v tem močnem smislu, je tako imenovani »modalni realizem«, stališče, da je matematika o možnostih. Glede na to teorijo imajo matematične izjave objektivno resničnostno vrednost, in te izjave, za katere verjamemo, da so resnične, so na splošno dejansko resnične, toda matematični objekti kot taki ne obstajajo. Kajti matematika je izrazljiva s pomočjo izjav, ki vsebujejo modalni operator, ta operator pa spodkopava ontološko zavezanost matematičnim objektom, za katere se zdi, da jih imajo

[2] Več o Fieldovi nominalistični teoriji glej spodaj, v 2. poglavju.

običajne matematične izjave. V skladu z modalnim realizmom matematične izjave, ki jih jemljemo, da so resnične, niso o matematičnih objektih, ki obstajajo; prej so resnične izjave o možnih objektih, objektih, ki utegnejo obstajati.[3] Ponovno, čeprav je za stališče te vrste bolj upravičeno, da se imenuje »realistično«, kot pa na primer Fieldova zgolj podpora šibkega realizma o resničnostni vrednosti, je to premalo za tisto, kar bi večina filozofov matematike prepoznala kot »realizem« *po sebi.* Konec koncev, tako rekoč, čeprav imajo samo možni objekti dovolj realnosti, da bi bile nekatere izjave o njih resnične in druge neresnične, nimajo povsem realnosti aktualnih objektov.

Medtem ko so uporabili manj stroga branja izraza »realizem« o matematiki, s čimer ni nujno biti realist v ontologiji, da bi se imenovali realist ali celo močen realist o resničnostni vrednosti – tako je dovolj biti realist o resničnostni vrednosti v šibkem smislu – v tej knjigi prepoznavam realizem o matematiki kot tistega, ki obsega realizem o ontologiji, in realizem o resničnostni vrednosti v močnem smislu.

Morda je najbolj znano realistično stališče v filozofiji matematike – in o njem je tudi ta knjiga – platonizem. Kar razlikuje platonizem od realizma na splošno, je njegova posebna različica realizma o ontologiji. Za platonizem ne velja le, da je matematika o neodvisno obstoječih bitnostih, ampak da so te bitnosti abstraktne v tem, da nimajo tako prostorske-časovne lokacije kot »konkretnih« lastnosti, značilnih za prostorsko-časovno umeščene predmete, kot so mize in kamni. Kljub temu platonizem trdi, da je eksistenca abstraktnih, ne-prostorskočasovno umeščenih objektov, ki jih istoveti z matematičnimi objekti, strogo podobna eksistenci fizikalnih objektov. Čeprav matematični objekti niso prostorsko-časovno umeščeni, imamo sposobnost, da jih nekako razumemo.

Namesto istovetenja platonizma z vrstami realizma, kot sem že počela, nekatere klasifikacije istovetijo platonizem z realizmom o ontologiji. Ponovno, ta raba je kajpada neskladna. Zelo malo teoretikov bi mislilo o sebi kot o platonistih, razen če bi bili pripravljeni zatrjevati realizem o resničnostni vrednosti (v strogem smislu) kot tudi realizem v ontologiji.

Jasno je, da je možno podpirati »realizem« v mojem smislu, ne da bi bili platonisti. Ena ponazoritev tega stališča je »realizem teorije množic«, ki ga podpira Penelope Maddy.[4] Glede na njeno različico realizma vsaj nekateri matematični objekti oziroma nekatere množice *niso* abstraktne; taki objekti so umeščeni v prostor in čas. V skladu z njeno teorijo, ko zaznamo fizikalni objekt *O*, zavestno ali nezavedno zaznamo tudi množico z enim samim elementom[5], ki ima zaznani objekt *O* kot svoj edini element. Števila, po drugi strani, niso objekti, ampak lastnosti množic.[6]

[3] Glej Hellman (1989).
[4] Glej Maddy (1990).
[5] Na splošno je »množica *S* z enim samim elementom« množica *S**, katere edini član je *S*.
[6] Stališče Maddyjeve bom podrobneje pojasnila v 4. poglavju. Maddyjeva je pogosto razvrščena kot platonistka, v literaturi pa je mogoče najti še dodatne rabe »platonizma«.

Anti-realizem v filozofiji matematike

Anti-realizem v filozofiji matematike zanika realizem. Zanika, da so naša matematična prepričanja objektivno resnična prepričanja glede na matematične objekte, ki obstajajo neodvisno od naših konstrukcij, intuicij in matematičnega postopka. Razdelimo ga lahko v dve glavni skupini:

i) subjektiviste in

ii) eliminativiste.

Subjektivisti podpirajo idejo, da so matematični objekti kot tudi dejstva subjektivna, da so odvisna od nas. Naj tukaj omenim intuicionista, kot sta Brouwer ali Heyting, ki trdita, da je matematika o konstrukcijah: matematični objekti ne obstajajo neodvisno od naših misli. Da je matematična izjava resnična, pomeni, da matematična konstrukcija predstavlja dokaz za to, da je bila uspešno realizirana (ali vsekakor pomeni dejstvo, da je bila metoda za izvedbo konstrukcije, ki bo dokazala ali ovrgla izjavo, dokazana, ta metoda pa bo v resnici njen dokaz). Subjektivizem v tem smislu dopušča, da je večina matematičnih izjav, za katere klasična matematika meni, da so teoremi, zares resnična. Kljub temu je revizijski za značilno telo klasičnega matematičnega postopka, saj tega postopka ni mogoče uskladiti s pravkar opisanim pojmom resnice.

V tem pogledu je subjektivizem v nasprotju z eliminativizmom. Kajti eliminativisti trdijo, da ne obstajajo značilne matematične resnice, ki naj bi jih razumeli: skoraj celotna klasična matematika je dobesedno neresnična. Klasično matematiko je gotovo mogoče nanesti na fizični svet in je potemtakem koristna. Toda njen večji del je vseeno neresničen. Med radikalnimi eliminativisti, kot je Hartry Field, je napaka matematičnih stališč ontološka: medtem ko ima platonist prav, ko predpostavlja, da je matematika (klasična in intuicionistična) zavezana ne le obstoju matematičnih objektov, ampak tudi *abstraktnim* objektom, je ta zavezanost popolnoma zgrešena: (sodobni) nominalizem je pravilen v tem, da *ni nobenih abstraktnih objektov.*

Nasprotno, za eliminativiste s »slabim srcem«, kot je »formalist« David Hilbert, matematika zaide s prave poti, ko vstopi v kraljestvo neskončnosti. Za Hilberta imajo končne matematične izjave, kot so $2+2=4$, $3^2=9$, $4\neq5$, $2½$ in podobne, intuitivno jasen pomen. Ampak izjave, kot so $a+b=b+a$, $\log(ab)= \log(a)+\log(b)$ in podobne, so bolj problematične in celo dobesedno nesmiselne. Po njegovem mnenju izjave takšne vrste delujejo kot idealni elementi. Kot pravi Hilbert:

> »da ohranimo preprosta formalna pravila običajne Aristotelove logike, moramo *dopolniti končne izjave z idealnimi izjavami.*«[7]

Čeprav bi lahko veliko povedali v zvezi z artikulacijo in razvojem anti-realističnih filozofij matematike, se ne bomo ukvarjali z njihovo zapletenostjo. Moj cilj je pokazati, da je anti-realizem o matematiki v osnovi zgrešen. V ta namen preostali poglavji prvega dela predstavljata pozitiven argument za

[7] Glej Hilbert »On the Infinite«, v Benacerraf in Putnam (1983), str. 195.

posebno različico realizma – namreč platonizem. Drugi del kaže, zakaj najpomembnejši anti-realistični kritiki platonizma spodrsne in izbere eno izmed mnogih različic platonizma kot tisto, ki ji je treba dati prednost.

2. poglavje

Realizem (1) – Realizem o resničnostni vrednosti

Odkar je bil platonizem videti kot različica realizma (v filozofiji matematike), hočem v tem in naslednjem poglavju nadalje pojasniti in zagovarjati (matematični) realizem. Za realizem je bilo videti, da obsega dve tezi – realizem o resničnostni vrednosti in realizem o ontologiji. Prvo zagovarjam v tem poglavju, drugo v naslednjem.

1. Resničnostna zmožnost in pojmi resničnosti

V filozofiji matematike je realizem o resničnostni vrednosti v šibkem smislu stališče, glede na katero imajo matematične izjave objektivne resničnostne vrednosti neodvisno od našega mnenja, jezika ali konvencij; so resnične ali neresnične neodvisno od naše sposobnosti določanja njihove resničnostne vrednosti. Realizem o resničnosti vrednosti v močnem smislu dopolnjuje to tezo z dodatno trditvijo, da so, v glavnem naša prepričanja o tem, katere razne matematične izjave imajo resničnostno vrednost, pravilna. Se posebej trdi, da matematični teoremi niso objektivno neresnični, ampak so objektivno resnični.

Kdo bi utegnil misliti, da je v tej karakterizaciji veliko odvečnosti. Zlasti, zakaj matematični realizem o resničnostni vrednosti preprosto ne bi smel biti stališče, da so matematične izjave resnične ali neresnične? Odgovor na to vprašanje je naslednji: če bi bil matematični realizem o resničnostni vrednosti karakterizirali na ta način, bi obstajale različne vrste nauka, ki bi se zelo razlikovale v svojem pomenu. Obstajajo razni pojmi resnice in če bi bil matematični realizem o resničnostni vrednosti karakterizirali le kot tezo, da so matematične izjave resnične ali neresnične, bi potem bilo to, kaj ta teza pomeni, odvisno od uporabljenega pojma resnice.

Da bi ocenili težavo, se moramo vprašati, kaj pomeni za izjavo reči, da »je resnična (ali neresnična)«. Zlasti, kaj za izjavo pomeni, da je, na prvem mestu, resničnostno »zmožna«?[8] Izrazi kot »Resnično je, da ...« so dnevno uporabljeni v raznih različnih področjih diskurza. Ampak podrobnejše analize pomena izraza »resnično«, ki se v njih pojavlja, jih dela na videz manj trivialne ali samoumevne in jim povzroča veliko težav.

Veliko naših izjav ni resničnostno zmožnih. Primer bi lahko bil »Zapri vrata!« ali »Koliko je ura?« in podobno. Tako se zdi, da izjave z velelno (imperativno)

[8] Izraz je »resničnostno zmožen«, če in samo če je nanj mogoče nanesti pojem resnice (očitno, na primer, samo lastno ime, kot je »Julij Cezar«, ni resničnostno zmožno).

ali vprašalno močjo nimajo resničnostnih vrednosti. Toda takoj, ko se premaknemo od takih izjav k izjavam, ki uporabljajo *deklarativne* stavke, vprašanje resničnostne zmožnosti ni tako očitno, kot si morda predstavljamo. Na primer, morda bi lahko k sreči rekli »Resnično je, da ima božiček dolgo belo brado« ali »Resnično je, da je bil Macbeth hladnokrvni morilec«. Toda ali resnično želimo povedati, da je tukaj vpleten pojem resnice enak tistemu, ki je vpleten, ko rečemo »Ali je resnično, da je najbližji planet Soncu Merkur?« Ali je taisti pojem resničnostne vrednosti, ki ga je mogoče uporabiti za izjave, ki zadevajo, na primer, like iz pravljice, mogoče nanesti na izjave o planetih? Težko je verjeti, da je mogoče. Zdi se, da je področje fikcijskih individuumov v polarnem nasprotju s področjem fizikalnih objektov in s tem z biologijo ali fiziko ali astronomijo in podobno. V skladu s tem, če je pojem resnice, ki ga je mogoče uporabiti v zadnjih primerih, edini, bomo morali popraviti našo prakso: v realnosti ni nič, kar zadeva pravljico ali na splošno fikcijske like, zmožno resnice, medtem ko je vse, kar zadeva znanost, zmožno.

Toda naše nanašanje resnice in neresnice na izjave o fikcijskih likih, kot je »Resnično je, da je bila gospa Macbeth hladnokrvna morilka,« se zdi popolnoma naravno. Ker to nanašanje ni nenavadno ali nesprejemljivo, se zdi, da je treba dati prednost temu, da te prakse ne opustimo. Potem se seveda zdi prav predpostaviti, da se za take primere uporablja drugačen pojem resnice od tistega, ki se uporablja na primer v fizičnem primeru.

Nekoliko drugačen primer, ki je spodbudil idejo, da obstajajo različni pojmi resnice, ponujajo izjave, ki sporočajo pravila ali konvencije. Preučite naslednjo izjavo »[za žensko] je popolna formula [za poljub v družbi]: levo, desno, vendar ne še enkrat levo, in vse z minimalnim človeškim stikom« ali »Rokada je dovoljena le, če se niti trdnjava niti kralj nista premaknila«.[9] Obe izjavi sta resničnostno zmožni: rečemo lahko, na primer, »Resnično je, da je rokada dovoljena le, če se niti trdnjava niti kralj nista premaknila«. Vendar se, kot v primeru, ki zadeva fikcijske like, zdi napačno predpostavljati, da je pojem resnice, ki se uporablja tukaj, enak pojmu resnice, ki se uporablja v izjavi, kot je »Baker prevaja elektriko«. Domnevno imajo izjave, s katerimi sem ponazorila konvencije in pravila, razumevanje, v skladu s katerim je mogoče nanje nanesti močnejši pojem resnice: prve bi bilo mogoče razumeti »V skladu z nekaterimi družbenimi konvencijami ...«, medtem ko bi bilo druga mogoče razumeti kot »Pri šahu so pravila taka, da ...«. Tako razumljena, se stavka uporabljata, da tvorita izjave o konvencijah ali pravilih, ki delujejo na nekaterih mestih ali v nekaterih igrah. Zdelo bi se, da kot taka zadevata dejanska stanja in zato bi se zdelo, da se uporablja močan pojem resnice. Kakorkoli, stavka je mogoče tudi razumeti, kot da ne sporočata konvencij ali pravil, temveč kot da jih prej *izražata. V* skladu s tem razumevanjem se pojem resnice še vedno nanaša: nekdo lahko naposled podpre konvencijo ali pravilo, ki ga izraža drugi, ki izjavlja »S«, in en način takega početja je odgovor »Resnično je, da S«. Kakorkoli, pojem

[9] Morgan, John (2000) *Book of Modern Manners – Perfect Behaviour in an Imperfect World* (Harper Collins Publisher, London), str. 15–16.

resnice, ki se uporablja, ni močen pojem, ki ga je mogoče nanesti na fizikalne objekte ali njihove lastnosti.

Sodobna razprava o resnici na splošno predlaga, da so v različnih primerih, podobnim tistim, ki so bili pravkar preučeni, lahko zmožni razni pojmi resnice različnih jakosti, od katerih noben ne zadovoljuje najmočnejšega pojma, ki je paradigmatično uporaben za izjave o fizikalnem svetu. Zlasti, lahko imamo resničnostno zmožnost na minimalni stopnji in minimalni standard pravilnosti glede izjav z nekega področja diskurza v vseh onih primerih, o katerih resnično ne želimo reči, da so izjave o zunanji realnosti, vendar se ne želimo vdati in reči, da so takšne izjave lahko resnične ali neresnične. Sporno je seveda, katera področja diskurza so primerna za tak način obravnave. Mnogi trdijo, da je šibkejše pojme resnice mogoče uporabiti zgolj za taka »problematična« področja, kot sta estetika ali etika. Četudi lahko zagotovo odvrnemo »To je resnično/neresnično« kot odgovor na izjave, kot je »Lubenica je okusna«, »Slika 'La Gioconda' je lepa«, »Mučenje je napačno« itn., takšne izjave se ne zdijo vsakomur objektivno resnične. Seveda bi lahko kdo podpiral še močnejši pojem resnice na omenjenih področjih razprave: lahko bi rekel, da fikcijski liki ali estetske ali moralne lastnosti resnično obstajajo. Vendar me to stališče tu ni zanima. Katerekoli so že njegove koristi, je dejstvo, da so nekateri trdili, da obstajajo različni pojmi resnice raznih jakosti, in da so nekatera področja diskurza, v katerih je uporaben šibkejši pojem, takšna, da najmočnejši pojem ni uporaben. Moja skrb je – v luči tega dejstva – pojasniti realistovo tezo, da so matematične izjave resnične ali neresnične neodvisno od nas in naših praks glede na to dejstvo.

Glede na dejstvo, so bili predpostavljeni različni pojmi resnice, je to, kaj matematični realizem o resničnostni vrednosti pomeni, odvisno od uporabljenega pojma resnice. Očitno smo lahko razumeli, da je »realizem o resničnostni vrednosti« nevtralen glede uporabljenega pojma resnice: potem bi nastale različne vrste matematičnega realizma o resničnostni vrednosti, odvisno od pojma resnice, za katerega se trdi, da ga je mogoče nanesti na matematične izjave. Kakorkoli že, zgodovinsko nenavadno je imenovati stališče, po katerem so matematične izjave minimalno resničnostno zmožne, kakršnokoli vrsto *realizma* o resničnostni vrednosti. V moji terminologiji je potem »realizem o resničnostni vrednosti« teza, da so matematične izjave resničnostno zmožne glede na *najmočnejši* pojem resnice. Ampak najmočnejši pojem resnice, ki ga je mogoče nanesti na področje razprave, je pojem resnice, glede na katerega so izjave iz tega področja resnične ali neresnične neodvisno od naših misli, prepričanj in postopkov. To je razlog, zakaj sem »realizem o resničnostni vrednosti« v filozofiji matematike označila kot nauk, da so matematične izjave resnične ali neresnične neodvisno od nas, naših matematičnih misli in postopkov.

2. Dva argumenta za realizem o resničnostni vrednosti

Ko smo povedali, kaj pomeni realizem v filozofiji matematike, je naslednja naloga dati razloge za podpiranje takega stališča. Obstajata dva glavna argumenta za sprejem realizma: argument »očitnosti« in Quine-Putnamov argument iz neizogibnosti. Oglejmo si ju pobliže.

Argument očitnosti

Argument očitnosti je zelo kratek. Je tak: matematični teoremi so resnični v močnem smislu, ker je njihova resnica v močnem smislu *očitna*. Ta argument se morda zdi nepomemben. Kakorkoli, stopnja, v kateri je navdušil enega izmed največjih matematikov dvajsetega stoletja, je osupljiva.[10] Zato ga moramo še dalje preučiti.

Vsekakor imamo občutek, da ni nobene alternative na odgovor »4« v zvezi z vprašanjem »2+2=?«. Rezultat je za nas preprosto očiten. Četudi si lahko zamišljamo svetove, ki so precej drugačni od sveta tam zunaj, si prav gotovo ne moremo zamisliti drugačnega rezultata od 4 pri operaciji »2+2«, razen če spremenimo pomen »2« ali »4« ali operacije »plus« ali pomen »enakosti«. Kdo bi lahko odgovoril, da je v nekaterih knjigah, na primer teoriji grup, mogoče najti rezultate kot »2+2=1«, tako da ni resnično, da je možen samo en rezultat. Kakorkoli, take enačbe so zavajajoče, ker je pomen uporabljenega izraza (izrazov) drugačen od običajnega. Prvič, domena je Z,, torej »enak« pomeni »enak modulu 3« in enačba »2+2=1« pomeni »2+2=1 (mod 3)«, ki je drugačna enačba od »2+2=4«; namreč en izračun (kot »2+2=4«) je običajno seštevek, medtem ko je v drugem (»2+2=1«) rezultat (1) pridobljen z določanjem ostanka deljenja s 3 kot rezultat običajnega seštevka (2+2), to je kot 4. To zato ni primer, da je pridobljen drugačen rezultat istega izračuna; »2+2=4« je resničen, to pa je nujno tako.

Kdo bi se lahko pritožil, da je ta argument osredinjen na duha in zato ni zanesljiv. To, da obdržimo nekatere rezultate kot očitne, bi lahko bilo posledica tega, kako deluje duh; poleg tega so v zgodovini matematike obstajali rezultati, ki so se zdeli očitni, ampak niso bili resnični. Primer bi utegnila biti trditev, da je vsaka zvezna funkcija na zaprtem intervalu odvedljiva za vse, vendar končno število točk v intervalu. Ta trditev se je zdela očitno resnična za matematike, dokler Weierstrass ni dokazal, da ni resnična, ko je našel protiprimer.[11]Kakorkoli že, morda bi lahko rekli, da je stopnja očitnosti v tem primeru drugačna od stopnje očitnosti v primeru »2+2=4«. Poleg tega bi lahko upravičeno rekli ravno toliko povsem na splošno glede (sorazmerno redkih) primerov, v katerih so bile propozicije, ki so jih matematiki vzeli za

[10] Podal ga je *Gödel* (1944), str. 477–69.

[11] Leta 1861 je bil Weierstrassov rezultat šok za matematično skupnost. Dokazal je namreč, da je za vsako konstanto a in b, tako da je $0<b<1$ ter $ab>1+3\pi/2$, funkcija
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$
zvezna in ni odvedljiva v vsaki točki njene domene.

samoumevne, kasneje dokazane za napačne. Pojmi zveznosti in odvedljivosti funkcij niso bili, naposled, primerno razviti v tistem času.

Koga lahko skrbi, da je argument očitnosti povezan z neprimerno omejenim stališčem matematike. Saj predlaga, da bi morali bili matematični teoremi omejeni na tiste propozicije, ki jih je mogoče izpeljati iz propozicij – aksiomov, o njih lahko razmišljamo kot o propozicijah, – ki so očitni. Vendar za argument očitnosti ni nujno, da je povezan s to sliko – prav nasprotno. Poudarek na očitnosti dopušča »izpeljan« način sklepanja v matematiki, kjer so »aksiomi«, ki so manj kot očitni, uporabljeni na osnovi, da poenotijo in pojasnjujejo teoreme, ki jih sprejemamo na osnovi predhodne očitnosti. Ko je dokazoval, da so osnovni aksiomi teorije množic očitni v tem, »da se vsiljujejo, kot da so resnični«, je tudi sam Godel naredil to poanto, ko je omalovaževal pomen Cohenovega dokaza neodvisnosti hipoteze kontinuuma od standardnih aksiomov teorije množic. *Kako*, bi se lahko vprašali, je lahko hipoteza kontinuuma objektivno resnična ali neresnična, če aksiomi ZFC[12] ne določajo, katera je? Soočen s tem vprašanjem, nas Godel opozarja, da naj ne obupamo nad reševanjem statusa hipoteze kontinuuma. Ostaja upanje, da lahko standardne aksiome teorije množic dopolnimo z drugimi, *tudi če so dopolnilni aksiomi manj kot očitni*:

> »za aksiome ni nujno, da so evidentni sami po sebi, temveč je njihovo upravičenje (natanko tako kot v fiziki) v dejstvu, da naredijo mogoče, da so te 'čutne zaznave' izpeljane ...«.[13]

Preprostosti argumenta očitnosti ne bi smeli dovoliti, da zmanjša njegov vpliv; niti ne bi smeli misliti, da bi matematiki vsiljevali neprimerno omejeno metodologijo.

Quine-Putnamov argument iz neizogibnosti

Samorazvidnost ni edini razlog za to, da se matematični teoremi obravnavajo kot resnični, kjer je mišljen bogatejši pojem resničnega. Četudi si lahko zamislimo različne fizikalne teorije o realnem svetu ali o svetovih, ki so drugačni od tega, v katerem živimo, so vse te fizikalne teorije utemeljujejo na istem matematičnem aparatu. Zdi se, da imajo matematični teoremi poseben status v naši mreži prepričanj. Igrajo osrednjo vlogo v našem podjetju razumevanja in nadzorovanja fizikalnega sveta. Vendar, razen če matematika ni resnična, ni jasno, kaj jo naredi koristno v takih aplikacijah. Kot kaže Maddy:

> »Predpostavimo, na primer, da fizik preizkuša hipotezo z uporabo matematike, da bi izpeljal napoved, utemeljeno na opazovanju ... kakšen je razlog, da vzamemo to opazovanje za posledico te hipoteze? Če pa ni posledica, lahko stežka ponudi pravičen test. Z drugimi besedami, če

[12] Naj bo ZFC standardna Zermelo-Fraenkelova teorije množic, vključno z aksiomom izbire.
[13] *Gödel* (1944), str. 449.

> matematika ni resnična, moramo pojasniti, zakaj je pravilno, da je obravnavana kot resnična, ko jo uporabljamo v fiziki.«[14]

Ne glede na to je matematika v vsaki veji znanosti: fiziki, biologiji, kemiji in tako naprej *sine qua non* disciplina za razvijanje katerekoli sprejemljive teorije. Najbolj raznolike teorije in najbolj raznolika znanstvena področja o fizikalnem svetu temeljilo na istem matematičnem aparatu: v genskem inženiringu ali sociooloških statističnih raziskavah ali astronomiji ali katerikoli drugi znanstveni temi je matematika neizogibna in je nujno sprejeti isto matematično ozadje. Matematika je nepogrešljiva v znanosti; to je tisto, zaradi česar smo upravičeni zatrjevati, da je resnična. To je »Quine-Putnamov argument iz neizogibnosti«, ki se tudi imenuje »holistično-naturalistični argument iz neizogibnosti«. Argument se lahko podrobneje izoblikuje, kot da je sestavljen iz treh premis:

(i) Neizogibnost: matematika je neizogibna za naravoslovje.

(ii) Potrditveni holizem: če opazovalna evidenca podpira znanstveno teorijo, podpira teoretični aparat kot celoto, ne pa neke posebne hipoteze.

(iii) Naturalizem: naravoslovje je za nas končni razsodnik resnice in eksistence.

Argument nato poteka na naslednji način: za (i), matematika je neizogibna za našo teorijo sveta; po (ii), katerikoli dokaz, ki ga imamo za resničnost neke znanstvene teorije, je hkrati dokaz za resničnost matematičnega aparata, ki je uporabljen pri oblikovanju teorije in pri izpeljavi napovedi iz te teorije, katerih potrditev tvori dokaz za to teorijo; zato, je po (iii), matematika resnična.

Utegne se misliti, da je šibkost tega argumenta v tretji premisi, naturalizmu. Medtem ko ta premisa v bistvu predpostavlja, da je mogoče pridobiti dokaz, ki temelji na opažanju, za dobesedno resnico znanstvenih teorij vsaj od Berkeleyjevega časa sem, je instrumentalistična tradicija v filozofiji znanosti zanikala, da je to mogoče. Kakorkoli že, medtem ko so nedavni napredki v sami znanosti povzročili, da se zdi instrumentalizem vedno bolj in bolj sprevržen (kljub nekako junaškim prizadevanjem Basa van Fraassna, da bi ohranil tradicijo), bolj razrahljana različica argumenta iz neizogibnosti shaja brez te premise. Ta argument se včasih imenuje »pragmatični« argument iz neizogibnosti v tem, da podpira matematični realizem neodvisno od znanstvenega realizma. Poteka takole:

(iv) številnih sklepov, izpeljanih iz in v znanosti, ni mogoče izpeljati brez uporabe matematičnih teoremov.

(v) pri izpeljavi sklepov iz in v znanosti smo upravičeni le, če smo upravičeni, da jemljemo uporabno matematiko, da je resnična.

(vi) ne glede na to ali so sodobne znanstvene teorije dobesedno resnične ali se zanje razumno misli, da so dobesedno resnične na podlagi dokazov iz opazovanja, smo upravičeni verjeti njihovim napovedim iz opazovanja.

[14] Maddy (1990), str. 24.

Iz teh premis jasno sledi, da smo upravičeni verjeti matematiki, uporabljeni pri izpeljavi dokazov iz opazovanja iz sodobnih znanstvenih teorij. V nasprotju s Quine-Putnamovim argumentom iz neizogibnosti, ta argument ne predpostavlja resnice ali celo dobro podprtih znanstvenih teorij.

Medtem ko bi morala pragmatična različica argumenta iz neizogibnosti pomiriti skrbi tistih z instrumentalističnimi nagnjenji v filozofiji znanosti, še vedno ostaja radikalna kritika argumenta, ki grozi, da ga bo popolnoma spodkopala; to kritiko je podal Hartry Field.[15] Field dopušča, da *če* bi bila matematika nepogrešljiva za znanost, bi to predstavljalo zelo močan dokaz za matematični realizem o resničnostni vrednosti v močnem smislu in zato za objektivno resničnost matematike. Field kajpada zanika neizogibnost premise in zato antecedent tega pogojnika. Po njegovem stališču matematika ni neizogibna v znanosti. Čeprav matematika igra pomembno vlogo tako v formulaciji znanstvenih teorij kot pri izpeljavi posledic iz njih, je možno te teorije tako preoblikovati brez uporabe matematike kot izpeljati enake posledice iz njih, ne da bi uporabili matematiko.[16]

Fieldov program – projekt dokaza, da je matematiko teoretično (to je, v nasprotju s prakso) mogoče odstraniti iz sodobne znanosti – je izjemno ambiciozen in napredku, ki ga je Field naredil v tem pogledu, ne more spodleteti, da ne bi naredil vtis. Na osnovi razmisleka je kajpada prvi del programa tisti, ki je dejansko bistven. Drugi del – dokaz, da matematika ne dopušča izpeljave posledic, ki temeljijo na opažanju, iz teorij, ki niso izpeljive zgolj z logiko – je mogoče podpreti iz katerekoli perspektive. Skoraj vsi se strinjajo, da mora biti matematika v tem smislu »ohranjujoča«. Konec koncev, če ne bi bila, bi morala imeti *empirične posledice* (v kombinaciji z znanstvenimi teorijami), in bi zato sama bila empirična teorija. Ampak četudi je Mill mislil, da ima matematika empirično vsebino, ni nobene druga ugledna oseba storila kaj takega.

Prvi del Fieldovega programa je nekaj drugega. Kako, bi kdo lahko predpostavil, bi lahko *začeli* formulirati sodobne znanstvene teorije – in zlasti teorije teorij polja, kot je Newtonova gravitacijska teorija, brez pomoči matematike? Takšne teorije so običajno predstavljene kot družine matematičnih modelov, pri čemer je vsak od modelov mišljen, da predstavlja možno stanje sveta. Fieldova ideja je seveda, da bi utegnile biti enakovredno predstavljene kot trditve, ki so očitno in izključno o (točkah v) prostoru-času. Preučite teorijo (klasične, mase nič) Klein-Gordonovega polja.[17] To polje je predstavljeno z enakomernim skalarnim poljem v: $M \rightarrow$ R na prostoru-času Minkowskega (M, d), ki zadovoljuje enačbo

[15] Glej Field (1980).

[16] Field meni, da je matematika ontološko zavezana abstraktnim bitnostim: objektivna resnica matematike zahteva obstoj abstraktnih objektov (števil, množic in podobno). V skladu s tem gleda na argument iz neizogibnosti kot na argument za platonizem. Kot nominalist trdi, da je matematika dobesedno neresnična, ampak koristna fikcija. Kakorkoli že, ta ontološka vprašanja so nepomembna za argument iz neizogibnosti in njegov status. Argument je argument za objektivno resnico matematičnih izjav, karkoli bi to že terjalo. Kaj bi objektivna resnica matematičnih izjav pravzaprav zahtevala, je ločeno vprašanje.

[17] Tukaj sem dolžna Malamentu (1982).

polja $\Box\varphi = 0$. Samo toliko določa množico matematičnih modelov, od katerih vsak predstavlja dinamično možno zgodovino Klein-Gordonovega polja. Rezultat funkcije distance Minkowskega in Klein-Gordonovega polja je torej povzročiti nekatere relacije na (točkah) prostora-časa. Toda Fieldova ideja je, da bi se teoriji te vrste približali tako, da *začnemo* z njenim pomenom za relacije v prostoru-času. *Realno* fizikalno teorijo je mogoče identificirati z neko množico trditev o primitivnih relacijah na množici prostorsko-časovnih točk in jo kot tako preoblikovati. Teorem »reprezentacije« je potem mogoče uporabiti, da pokaže, da te trditve lahko povzroči ustrezna matematična družina modelov (v tem primeru, modelov, ki jih povzroči funkcija distance Minkowskega in Klein-Gordonovo polje).

Dejansko je pomen Fieldove tehnike zamenjati prave matematične teoreme o matematičnih bitnostih (modele in domene modelov), ki so uporabljeni, da predstavijo fizikalni svet, s fizikalnimi teoremi, ki neposredno zadevajo prostor-čas in zato prostorsko-časovne točke, ki ga sestavljajo, in relacije v njih. Z nominalistovega gledišča bi lahko dvomili, ali je ta zamenjava kak napredek: ali je prostorsko-časovna točka resnično tako drugačne narave kot na primer prazna množica, razumljena kot abstraktni objekt? Toda gledišče, lastno nominalizmu, v tem trenutku ni primerno. Sedanja skrb je vprašanje, ali so matematične izjave neizogibne pri formulaciji sodobnih teorij fizike. Pravkar ponazorjena tehnika pa se zdi v tem pogledu uspešna ne glede na naravo prostorskočasovnih točk. Prostor-čas *je* fizikalni svet. Teorija, ki zadeva samo njega, ni matematična teorija. Če bi bilo mogoče potemtakem Fieldove tehnike na splošno uporabiti, tako da bi bilo mogoče vse teorije sodobne fizike preoblikovati v smeri, ki jo predlaga, bi bil njegov primer dejansko dokazan. Osnovna predpostavka Quine-Putnamovega argumenta iz neizogibnosti bi bila spodkopana. Tako bi bila matematika naposled pogrešljiva.

Celo tam, kjer je uporabna, je Fieldova tehnika kajpada manj kot povsem uspešna. Nekatere izjave, ki so navidezno integralni del fizikalne teorije, se upirajo preoblikovanju.[18] In še bolj škodljivo je, da je Fieldova tehnika močno odvisna od značilnosti, ki so posebne za klasično teorijo polja. Field še ni niti začel kazati, kako bi kdo morda preoblikoval teorije kvantne-mehanskega polja ali alternativ, kakršni sta Hamiltonova mehanika ali kvantna mehanika.[19] Torej so trenutno premise argumenta iz neizogibnosti še vedno nedotaknjene.

3. Proti resnici, odvisni od duha

Četudi bi bila moč argumenta očitnosti dopuščena, ali ne bi bilo mogoče ugovarjati, da je vse, kar argument kaže, to, da so nekatere matematične izjave resnične. Ali ne kaže, da so *objektivno* resnične? Nasprotno, morda se zdi, da sama stopnja, v kateri se nekatere matematične izjave vsiljujejo, kot da so

[18] Malament, *nav. delo*, navaja take primere, kot so izjave »Možno je, da je Klein-Gordonovo polje nekonstantno« in »Polje se razvija deterministično«.
[19] Glej Malament, *nav. delo*, str. 532–4.

resnične (če prikličemo Gödlovo frazo), govori proti njihovi objektivnosti. Ali ni njihova ne-objektivnost najboljša razlaga njihovega močnega učinka na duha? Ali ni najboljša razlaga naše gotovosti glede osnovnih matematičnih teoremov in naše nezmožnosti za zamišljanje njihove neresničnosti, Kantova predpostavka, da duh sam *konstruira* njihovo resničnost? .

V zadnjem času Kantovo gledišče sistematično predstavlja šola matematike, znana kot »intuicionizem«. Po Brouwerju intuicionisti trdijo, da so matematične izjave resnične in *odvisne* od duha in zavračajo nekatere zakone klasične logike, ki se v veliki meri uporabljajo v klasični matematiki, kot je zakon izključene tretje možnosti. Po mnenju intuicionistov je (matematična) izjava resnična, če in samo če je bil konstruiran dokaz ali če je bila dana metoda za njeno dokazovanje. V tem primeru ni mogoče trditi, da je izjava bodisi resnična ali neresnična (neodvisno od našega poznavanja njene resničnostne vrednosti). Izjava ni niti resnična niti neresnična, preden imamo dokaz zanjo: ni res, da za vsako izjavo S velja bodisi *S* bodisi ne-S. Izjava, ki ni resnična danes, bo morda postala resnična kasneje, ko bomo dejansko imeli njen dokaz. Zakon izključenega tretjega mora biti zato izključen. Če je tisto, kar se trdi, od duha neodvisno pojmovanje resničnosti, potem morajo biti nekateri zakoni klasične logike izključeni in ni mogoče sprejeti klasične matematike.[20]

Soočen z nasprotnimi silami intuicionizma, poskus utemeljiti realizem o matematiki na argumentu očitnosti, ni zadovoljiv. Realizem o matematiki zahteva zakon izključenega tretjega. Toda to bo le stežka opravilo sklicevanje na očitnost zakona izključenega tretjega – enim nasprotnikom, intuicionistom, se to sploh ne zdi očitno. V resnici ga zavračajo. Kakorkoli že, argument iz neizogibnosti je v tem pogledu na trdnejšem temelju. Čeprav so bili intuicionisti izjemno uspešni pri zagotavljanju konstruktivnih dokazov za veliko klasične matematike, ostaja dejstvo, da so se nekateri deli klasične matematike uprli intuicionistično sprejemljivi rekonstrukciji. Nekateri od njih igrajo odločilno vlogo na področju znanosti. Oglejte si Gleasonov teorem, ki pravi, da je mogoče vse stopnje verjetnosti preko projekcijske mreže Hilbertovega prostora predstaviti kot operatorje zgoščenosti. To je osnovni teorem v osnovah kvantne mehanike: še več, ima korolarij, Kochen-Speckerjev rezultat, da ostrih vrednosti ni mogoče pripisati vsem spremenljivkam v vseh stanjih (in zato ovržba nekaterih teorij »skrite spremenljivke«). Toda Gleasonov teorem je v bistvu klasičen. Ne samo, da zanj ni bil dan noben konstruktivni dokaz, temveč se zdi, da zanj ni možen noben konstruktivni dokaz.[21]

Medtem ko argument iz neizogibnosti nedvomno igra odločilno vlogo pri podpiranju realizma o matematični resničnosti vrednosti, mu nekateri realisti dajejo ekskluzivno vlogo. Ne vidijo pomembnosti argumenta »očitnosti« in trdijo, da je argument, ki izhaja zgolj iz uporabnosti, dovolj za podpiranje realizma. Resnik, na primer, trdi, da fizikalni objekti delijo osnovne značilnosti matematičnih objektov, kar je dovolj, »da podrejo epistemološke in ontološke

[20] Za izčrpno razpravo o intuicionizmu glej Brouwer (1975) in Heyting (1956).
[21] Hellman (1993) je dokazoval, da je konstruktivni dokaz Gleasonovega teorema nemogoč.

ovire med matematiko in ostalo znanostjo«[22]. Resnikovi primeri takih fizikalnih objektov so kvantni delci. Ko pa govori o razlogih za podpiranje matematičnega realizma, omenja, prvič, matematične dokaze za matematične trditve in, drugič, dejstvo, da se resnica matematičnih teoremov potrjuje z uspešnimi uporabami v znanosti in v vsakdanjem življenju in da je nujno predpostaviti resnico matematike pri početju znanosti.[23]

Nekateri realisti, večinoma platonisti, kajpada nasprotujejo tako velikemu poudarku na argumentu iz neizogibnosti. Njihova skrb je, da ta argument matematiko preveč prilagodi empirični znanosti in mu tako ne uspe spoštovati njene *sui generis* narave. Gledano v celoti, se pridružujem njim proti Resniku. Mislim, da ima »argument očitnosti« pomembno vlogo. Po definiciji lahko argument iz neizogibnosti zgolj trdi, da obstaja neposredni dokaz za resnico tistih matematičnih teoremov, ki igrajo nujno vlogo pri formulaciji in manipulaciji znanstvenih empiričnih teorij. Ampak le majhen del matematike igra takšno vlogo v znanosti. Kaj je potem z njenimi drugimi deli? Nekatere od teh je nedvomno mogoče podpreti posredno, s pomočjo nekakšnega »abduktivnega« sklepanja, omenjenega v prejšnjem razdelku: matematični teoremi *T*, za katere ni neposrednega dokaza, so posredno podprti, ker izhajajo iz aksiomov, ki urejeno združujejo in pojasnjujejo te teoreme, za katere znanost zagotavlja neposredne dokaze. Ampak tukaj sta sodbi »urejenosti« in »pojasnjevalne moči« v bistvu matematični in v vsakem primeru bi lahko pričakovali, da bo ostala neka nepopolnost v tem, da bo nekaterim matematičnim teoremom celo spodletelo, da bi sodili v kategorijo teoremov, za katere obstajajo posredni dokazi v tem smislu. Argument očitnosti lahko prevzame to nepopolnost.

4. Realizem o resničnostni vrednosti proti realizmu o ontologiji

Argumenta očitnosti in neizogibnosti skupaj naredita realizem o resničnostni vrednosti (v močnem smislu) glede matematičnih teoremov za najbolj razumno stališče. Ampak ta rezultat ne dosega realizma o ontologiji in s tem realizma samega. Kajti dokazati, da so matematične izjave resnične, objektivno, ni samo po sebi reči karkoli o tem, zaradi česar so matematične izjave resnične. Še posebej, samo po sebi, ne pomeni reči, da resnica matematičnih izjav zahteva obstoj matematičnih bitnosti. Razdalja, ki jo je treba preiti, ko gremo od realizma o resničnostni vrednosti k realizmu o ontologiji, se utegne izkazati za kratko. Vendar jo je treba še vedno preiti.

To dejstvo je zakrito s številnimi razpravami o argumentih očitnosti in neizogibnosti, zlasti pa z razpravami o slednjem. Zgodovinsko je to bilo tako zato, ker so (predvsem) zagovorniki argumenta (Quine) in predvsem kritiki tega

[22] Glej Resnik (1997), str. 101.

[23] To stališče se imenuje pragmatični holizem. Omenja tudi tretji razlog, to je rezultate, ki jih dobivamo iz primerjave realizma z alternativnimi pozicijami v filozofiji matematike; realizem »razloži matematiko prav tako ali bolje kot drugi kandidati v filozofiji matematike«, vendar za ta zadnji argument ni nobenega zanimanja v sedanji razpravi. Glej Resnik (1997), str. 272.

argumenta (Field) sprejeli »pogojni« platonizem, to je, kot ga zajema pogojnik: če je matematika resnična, abstraktni objekti obstajajo. Tako, na primer, ko zagovarja argument iz neizogibnosti. Putnam piše:

> »matematika in fizika sta integrirani na tak način, da ni mogoče biti realist glede na fizikalno teorijo in nominalist glede na matematično teorijo«.[24]

Podobno, pri zavračanju argumenta iz neizogibnosti, Field piše:

> »četudi [matematične bitnost] igrajo vlogo v močnih teorijah sodobne fizike, bomo dali privlačna preoblikovanja takšnih teorij, v katerih matematične bitnosti ne igrajo nobene vloge«.[25]

Ko pa izraža svoj nominalizem, piše:

> »Do tistega dela matematike, ki vsebuje nanašanja na (ali kvantificira preko) abstraktnih bitnosti – in to vključuje skoraj vso konvencionalno matematiko – privzemam fikcionalistovo držo: to je, ne vidim nobenega razloga, da bi štel ta del matematike za *resnično.*«[26]

Vendar je kljub veličini teh zagovornikov pogojnega platonizma premik od realizma o resničnostni vrednosti k realizmu o ontologiji treba skrbno preučiti; več filozofov se mu je poskušalo upreti.

3. Realizem (2) – Realizem o ontologiji

V prejšnjem poglavju sem navedla razloge za podpiranje realizma o resničnostni vrednosti v močnem smislu: matematične izjave so primerne za močan pojem resnice (kot trdi realizem o resničnostni vrednosti v šibkem smislu), in, nadalje, matematične izjave, ki jih jemljemo za resnične, *so* na splošno resnične. V tem poglavju želim nasloviti drugi element realizma o matematiki. To je realizem o ontologiji. Dokazovala bom, da je realizem o ontologiji veliko bolj tesno povezan z realizmom o resničnostni vrednosti, kot bi lahko najprej domnevali. Iz realizma o ontologiji izhaja realizem o resničnostni vrednosti v šibkem smislu. Medtem ko nasprotno izhajanje ne drži – realizem o resničnostni vrednosti v šibkem smislu utegne biti resničen, ko je realizem o ontologiji neresničen – iz realizma o resničnostni vrednosti v močnem smislu izhaja realizem o ontologiji. Ker je bil razlog za sprejemanje realizma o resničnostni vrednosti v matematiki že dan, to izhajanje dopolnjuje argument za realizem o matematiki *po sebi*.

1. Realizem o ontologiji

Biti realist glede D-jev pomeni trditi, da D-ji obstajajo objektivno, v zunanji realnosti, neodvisno od naših konstrukcij, misli, konvencij ali želj. D-ji bi lahko bili množica povsem različnih stvari: estetskih vrednosti, kvarkov, miz in stolov

[24] Putnam (1971), str. 57.
[25] Field (1980), str. 8.
[26] Field (1980), str. 2.

in tako naprej. Nekdo je torej lahko realist v glede na neko področje diskurza, ne da bi bil realist glede na drugačno področje. Na primer, nekdo je lahko realist o ontologiji glede na opazljive teoretične bitnosti na področju znanosti, kot so kvarki, medtem ko je anti-realist o ontologiji glede na estetske vrednosti.

V filozofiji matematike je realizem o ontologiji stališče, glede na katero (vsaj nekateri) matematični objekti obstajajo neodvisno od naših konstrukcij in prepričanj. Za realista o ontologiji na področju matematike je potem matematika znanost o nekaterih objektih[27]: številih, množicah, funkcijah ali drugih objektih. Matematika je o takšnih objektih na enak način, kot fizika preučevanje fizikalnih objektov, subatomskih delcev in podobno.

2. Iz realizma o ontologiji izhaja realizem o resničnostni vrednosti v šibkem smislu

Kdo morda misli, da je realizem o resničnostni vrednosti neodvisen od realizma o ontologiji. V nasprotju s prvim, drugi sploh ne omenja resnice. Kakorkoli že, četudi tu ni omenjen pojem resnice, je realizem o ontologiji veliko bolj tesno povezan z realizmom o resničnostni vrednosti, kot bi morda kdo najprej domneval. To je zato, ker je pojem resnice močno vpleten v to, kaj pomeni reči, da objekti neke vrste »obstajajo neodvisno od naših postopkov itn.«.

To je še posebej očitno v matematičnem primeru. Če rečemo, da obstajajo matematični objekti, s katerimi se ukvarja matematika, pomeni reči, da se singularni izrazi v resničnih matematičnih izjavah značilno nanašajo.[28] Toda reči toliko samo po sebi ne zadostuje za realizem o ontologiji. Konec koncev intuicionist meni, da se matematični singularni izrazi tudi nanašajo. Torej realist o ontologiji postavlja velik del teže na idejo, da se matematični singularni izrazi ne nanašajo samo na objekte, ampak *na objekte, ki obstajajo neodvisno od našega matematičnega postopka.*[29] Toda kaj ta razlika – med (intuicionistovo) predpostavko, da so matematični objekti odvisni od duha, in (platonistovo) predpostavko, da so matematični objekti od duha neodvisni – resnično pomeni? Dummett ima gotovo prav, ko ugovarja, da je pravilen način razsvetlitve tega vprašanja v okviru resnice. Razlika med stališčem, da so matematični objekti odvisni od duha, in stališčem, da so od duha neodvisni, je razlika med stališčem, da so resničnostne vrednosti izjav o matematičnih objektih nekako odvisne, konec koncev, od matematičnega postopka, in stališčem, da je to, ali je matematična izjava resnična ali neresnična, popolnoma neodvisno od našega postopka. Potemtakem iz realizma o ontologiji izhaja realizem o resničnostni vrednosti.[30] Tega nauka niti ne moremo izraziti, ne da bi se zavezali realizmu o resničnostni vrednosti.

[27] Če za številke drži, da so abstraktni, vzročno inertni objekti, se potem imenujejo tipi. Če so številke mišljene, da so konkretni, fizikalni objekti kot znaki barve in podobno, se imenujejo primerki.

[28] To pa ne pomeni, da se *vsi* singularni izrazi v resničnih matematičnih izjavah nanašajo. Izjeme vključujejo dogodke singularnih izrazov znotraj obsega negacije.

[29] Glej Dummett (1973) »The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic«, v Dummett (1978), str. 228–229.

Realizem o resničnostni vrednosti, ki izhaja iz realizma o ontologiji, je kajpada zgolj šibek realizem. Ideja, da je treba stališče, da so matematični objekti neodvisni od duha, delno pojasniti kot stališče, da so matematične izjave resnične ali neresnične objektivno in zato neodvisne od našega postopka, zgreši stališče, da so izjave, za katere menimo, da izražajo matematične teoreme, na splošno resnične. Naslednje teze so skupno konsistentne: matematični objekti obstajajo neodvisno od našega duha; matematične izjave glede teh objektov so resnične ali neresnične neodvisno od našega matematičnega postopka; večina naših matematičnih prepričanj o teh objektih je neresnična. Seveda bi bila v praksi konjunkcija teh stališč precej nenavadna. Pričakovali bi, da bi vsakdo, ki je dovolj anti-skeptičen, trdil, da imajo matematični objekti od duha neodvisen obstoj, da bi imel malo razumevanja celo za skepticizem glede naših prepričanj o lastnostih teh objektov.

3. Realizem o resničnostni vrednosti v močnem smislu sproža realizem o ontologiji

Nasprotno izhajanje, od realizma o resničnostni vrednosti do realizma o ontologija, je morda bolj sporno. Seveda to izhajanje ni izhodišče v primeru realizma o resničnostni vrednosti v šibkem smislu. Kot smo pripomnili v prejšnjem poglavju, so nekateri nominalisti (kot je H. Field) odprti realisti o resničnostni vrednosti v šibkem smislu, ne da bi bili realisti o ontologiji. Trdijo, da so matematične izjave objektivno resnične ali neresnične neodvisno od našega postopka. Vendar delujejo tako, ker mislijo, da so te izjave neresnične. Trdijo, da te izjave nosijo ontološko zavezanost abstraktnim objektom. Vendar hkrati trdijo, da zavezanosti niso izpolnjene. Abstraktni objekti ne obstajajo in zato ne obstajajo niti matematični objekti.

Nasprotno, vprašanje, ali iz realizma o resničnostni vrednosti v močnem smislu izhaja realizem o resničnostni vrednosti, je bolj zapleteno. Spet, za nekatere se zdi, da so zanikali to izhajanje. Njihovi razlogi za tako početje so bili zelo različni. Vsi njihovi predlogi vključujejo idejo, da so lahko izjave, ki nosijo očitne ontološke zavezanosti – bodisi zaradi tega, ker vsebujejo singularne izraze, za katere se zdi, da se nanašajo, bodisi zaradi *prima facie* eksistencialnega kvantifikatorja »Obstajajo F-ji« – objektivno resnične, *četudi so te zavezanosti le navidezne.* Obstajajo tri glavne različice te strategije:

[30] Kdo morda podpira stališče, da matematični objekti dejansko obstajajo, vendar zato, ker so abstraktni in niso prostorsko-časovno umeščeni, za nas ni mogoče, da jih popolnoma razumemo in je zato pojem resnice, ki ga lahko uporabimo, pojem, povezan z našim postopkom. Glede na tako stališče, je torej mogoče trditi, nekaj podobnega: »Kolikor vemo, _____ je resnično. In o tem ni mogoče povedati nič več«. Na matematične izjave ni mogoče nanesti nobenega pojma resnice, razen pojma, ki je odvisen od našega postopka. Za stališče, ki ga je mogoče imenovati realizem v ontologiji in anti-realizem v resničnostni vrednosti glej Tennant (1987).
Zdi se mi torej težko uvideti, kako – če se lahko nanašamo na in kvantificiramo preko od duha neodvisnih objektov – od duha *neodvisen* pojem resnice ni mogoče nanesti na izjave o teh objektih, četudi bi morda bil takšen pojem resnice epistemološko nedostopen v smislu, da mi morda o takih izjavah ne vemo, ali so resnične ali neresnične.

Benacerrafova teorija, teorija substitucijskih kvantifikatorjev in teorija »če-potem-izma«. Slednje bomo obravnavali po vrsti.

Benacerrafova teorija. Benacerrafova zgodnja filozofija matematike se včasih šteje za paradigmatično možnost biti realisti o resničnostni vrednosti v močnem smislu, ne da bi bili realisti o ontologiji. Kajti Benacerraf zavrača, da se številke nanašajo, in potemtakem, da »3« obstaja, medtem ko istočasno razmišlja, da je izjava »3 je praštevilo« vseeno objektivno resnična. On pravi:

> »če je resnica znana, ne obstajajo nobene take stvari kot števila; kar ne pomeni, da ne obstajata vsaj dve praštevili med 15 in 20«.[31]

Kakorkoli že, menim, da je sklicevanje na Benacerrafa v tem kontekstu zmešnjava. Po mnenju Benacerrafa je govor o številih neke vrste okrajšava. Zadnjega stavka ne gre razumeti površinsko. Po mnenju Benacerrafa govor, da obstajata vsaj dve praštevili med 15 in 20, pomeni, da obstaja abstraktna struktura, tako da med 15-im in 20-im mestom strukture obstajajo mesta z nekaterimi značilnostmi. Benacerrafovo zavračanje obstoja števil pomeni njegovo trditev, da lahko *vsak* objekt igra vlogo *kateregakoli* mesta v strukturi.

Kakorkoli že, kakršnekoli že so vrednosti Benacerrafovega »strukturalističnega« stališča o teoriji števil (glej 6. poglavje spodaj) in njegovih trditev, da to stališče izključuje ontologijo števil, je napaka razumeti Benacerrafa, ko da zanika, da ima matematika ontološke zavezanosti. Jasna posledica njegove analize je, da je teorija števil zavezana obstoju vsaj ene kompleksne strukture. On zanika obstoj števil kot objektov, ampak izjave, katerih resničnostne vrednosti zatrjuje, niso o številih, to je objektih na prvem mestu. So o mestih v abstraktni strukturi. Benacerrafova teorija potemtakem ni dober primer, saj ponuja drugačno razumevanje nekaterih predlogov tistega, kar je standardno, platonistično razumevanje. On to počne, da bi rešil nekatere probleme, ki jih očitno prinaša na površje eksistenca *števil kot objektov*, medtem ko jih eksistenca (abstraktnih) struktur ne. Benacerrafovi teoriji potemtakem ne uspe pokazati, kako je realizem v resničnostni vrednosti brez kakršnihkoli objektov možen, če je uporabljen močnejši pojem resnice.

Teorija substitucijskih kvantifikatorjev. Pri standardnem »objektnem« razumevanju izjave, ki vključuje »eksistencialni« kvantifikator, izjava »Obstajajo F-ji« izraža zavezanost obstoju F-jev. To je razlog, zakaj se imenuje »eksistencialni« kvantifikator. Iz tega sledi, da če je kvantifikator, ki ga uporabljamo na primer v teoriji števil, ko rečemo na primer »Obstaja praštevilo med 15 in 20«, standarden objekten, je teorija števil ontološko zavezana eksistenci števil. Tukaj ni prostora za argument o tej zadevi. Enako potem tisti, razen če naj se teorijo števil nekako rekonstruira ali »predela« na tak način, da se za teorem, da obstajajo praštevila med 15 in 20, zdi, da ima povsem drugačno obliko, ki bi zanikali njegovo ontološko zavezanost, nimajo druge izbire kot trditi, da kvantifikator, ki ga uporablja, ni standarden, objektni kvantifikator, temveč drugačen.

[31] Benacerraf (1965), str. 294.

Kar je značilno za objektne kvantifikatorje, je resnično značilno za spremenljivke, ki jih vežejo: spremenljivke, ki jih veže objektni kvantifikator, segajo preko objektov, tako da so kvantificirane izjave resnične, če in samo *če je* predikat resničen za nekatere ali vse (odvisno od kvantifikatorja) objekte, čez katere segajo spremenljivke. Vendar ne glede na to interpretacijo, je možno tudi »substitucijsko« razumevanja kvantifikatorjev. Po tej interpretaciji so resničnostni pogoji za substitucij ski kvantifikator popolnoma drugačni. Podani so v okviru substitucijskih primerov. Na primer »Ax Ex« je resničen, če in samo če je za neki *singularni izraz »a«, Fa* resničen. Torej je možno imeti izjave, ki so neresnične po objektnem razumevanju, medtem ko so resnične po substitucijskem razumevanju. Primer bi lahko bil stavek »Neki x je tak, da je *x* krilati konj«. Ta je neresničen pri objektnem razumevanju, saj objekti preko katerih spremenljivka, ki jo veže kvantifikator, seže, ne vključujejo medse krilatega konja: ne obstaja noben tak objekt, tako da je konj in ima krila. Pri substitucijskem razumevanju je to resnično: če vstavimo singularni izraz »Pegaz« v frazo *»x* je krilati konj«, je rezultat – izjava »Pegaz je krilati konj« – resnična. Ideja je torej, da bi morda bili kvantifikatorji, uporabljeni v teoriji števil, substitucijski kvantifikatorji. V tem primeru resnica izjave »Obstajajo praštevila med 15 in 20« ne bi *očitno* zahtevala eksistence objekta, ki je število, ki je praštevilo in ki je med 15 in 20. Ne bi zahtevala nič več kot to, da je za neko število *n* izjava *»n* je praštevilo med 15 in 20« resnična.

Pravzaprav je odgovor na ta predlog očiten. Seveda, ne obstaja več nobena jasna ontološka zavezanost, ki jo nosi kvantifikator: mi očitno ne predpostavljamo, da spremenljivka v »Za neki *x* obstaja praštevilo ...« sega preko objektov. Vendar pa vseeno obstajajo implicitne zavezanosti.

Prvič, substitucijsko razumevanje kvantifikatorja ne more preprosto jemati substitucijskih primerov – kakršne so v primeru teorije števil številke – za samoumevne. Kaj pomeni »Obstaja *x,* tako da je *x* številka, tako da ...«? Če je kvantifikator objektni, spremenljivke segajo preko objektov. Ampak potem morajo biti številke mišljene kot abstraktni objekti. Če niso, potem se bo izjava teorije števil v smislu, da obstaja neko zelo veliko število z nekaterimi lastnostmi, izkazala za neresnično samo zato, ker še nihče nikoli ni zapisal številke, ki se nanaša na to število. Torej je ontološka zavezanost teorije števil – še več, zavezanost abstraktnim objektom – obnovljena. In kako drugače je mogoče razumeti govor o substitucijskih primerih, če ne s pomočjo objektnega kvantifikatorja?

Drugič, kako je lahko substitucijski primer, kot je »17 je praštevilo med 15 in 20«, resničen, razen če substitucijsko nima reference? Zapomnite si, da je pojem resnice, za katerega tu gre, močen pojem. Predpostavlja se tako, da je resnica te izjave neodvisna od matematičnega postopka itn., kot da je znano, da je resnična: objekt razprave je posledica za ontologijo realizma glede resničnostne vrednosti v močnem smislu. Ne verjamem, da je lahko izjava »Pegaz je krilati konj« resnična v *tem smislu,* razen če se ime »Pegaz« resnično ne nanaša. Če

rečemo, »Pegaz je krilati konj« je resnično po substitucijskem razumevanju, to pomeni na prvem mestu uporabiti šibkejši pojem resnice.

Teorija »če-potem-izem«. Obstaja še ena možnost, ki ostaja tistim, ki so prepričani, da realizem o resničnostni vrednosti nujno ne pomeni kakršnekoli ontološke zavezanosti: modalna možnost. Ideja je, da so matematične izjave v bistvu o *možnostih.* Ta ideja ima različne manifestacije. Če – da se vrnemo k vrsti gledišča, ki ga ponazarja Benacerraf -, privzame takšno obliko, kot da znova tolmači na primer »Obstaja praštevilo med 15 in 20« kot izjavo »Obstaja možna struktura, v kateri obstaja mesto med 15-im in 20-im, ki ima take in take lastnosti«, potem ontološka zavezanost izjave ostaja očitna: to ni zavezanost dejanskim objektom, temveč zavezanost možnim objektom.

Boljša alternativa za modalista je potem, da se zateče k »če-potem-izmu«, to je stališču, v skladu s katerim se navidezne ontološke zavezanosti odstranijo tako, da se jih da v antecedent pogojnika. Ta alternativa bi lahko formulirala Benacerrafovo stališče takole: *»Če* obstaja struktura, ki izpolnjuje nekatere pogoje (kot so tisti, ki jih nalagajo Peanovi aksiomi), potem je za strukturo res, da med 15-im in 20-im mestom ...«. Ta alternativa ponuja boljše možnosti za uspeh. Izjave te oblike bi lahko bile prav tako objektivno resnične neodvisno od nas, četudi ne obstajajo nobene strukture ali katerikoli drugi matematični objekti. Čeprav je to stališče koherentno, je kajpada zelo neverodostojna rekonstrukcija. Ne odraža matematične prakse. V teoriji števil, na primer, ne uporabljamo spremenljivk preko strukture. Raje uporabljamo številke, za katere se zdi, da delujejo kot singularni izrazi, in spremenljivke, za katere se zdi, da segajo preko števil.

Seveda obstaja veliko matematičnih področij, v katerih zatrjujemo teoreme »čepotem«. Na primer, v teoriji grup lahko trdimo, da: »Če je množica z operacijo na njej grupa in je njena moč praštevilo, potem je taka množica Abelova grupa«. Primerov, kot je ta, je nešteto. Ampak ti ne pokrijejo popolnoma vse matematike. Vzemimo aksiom neskončnosti: ta trdi, da *obstaja* neskončna množica; ni jasno, kakšno obliko »če-potem-izma« je treba uporabiti v teh primerih. Poleg tega če-potem-izem ne pojasnjuje, kako pride do tega, da je matematika uspešna in neizogibna v znanosti glede na to, da je samo o možnostih.

4. Teorija resnice

Pravkar smo videli, da so poskusi, da se upremo implikaciji, ki jo ima prehod od realizma o resničnostne vrednosti v močnem smislu k realizmu o ontologiji, manj kot uspešni. Toda najboljši način, kako pokazati neizogibnost te implikacije, je, da še naprej premišljujemo o močnem pojmu resnice, ki ga vključuje realizem o resničnostni vrednosti.

Ker je ideja močnega pojma resnice v tem smislu, da je resnica odvisna od značilnosti objektivno obstajajočega sveta, mora zahtevana teorija resnice vključiti ontologijo dejstev. Ker se poleg tega trdi, da je matematična izjava

resnična ali neresnična neodvisno od naše zmožnosti določanja njene resničnostne vrednosti, podprta teorija resnice ne more biti epistemična. Namreč, epistemsko pojmovanje pomeni, da je stavek *S* resničen, če in samo če _____, kjer prazen prostor vsebuje epistemski pogoj za S, tak, kot: biti preverjen, biti upravičen ali biti zajamčen tako, da je odvisen od našega epistemološkega uspeha.

Teorija, ki se zdi, da izpolnjuje vse zahtevane pogoje, je korespondenčna teorija resnice.[32] Ker ni splošnega soglasja o tem, kaj korespondenčna teorija resnice pomeni, bom na kratko skicirala različico teorije, ki jo zagovarjam. Po mojem razumevanju korespondenčno pojmovanje resničnosti obsega nenavajalni vzajemni pogojnik *[biconditional]* za resnico, povezan z nenavajalno definirano referenčno relacijo.

Od Tarskijevih rezultatov pri definiranju resnice sem, so skoraj vsi, ki jih zanimajo teorije resnice, trdili, da za to, da bi bila sprejemljiva, mora teorija resnice vsebovati nenavajalni vzajemni pogojnik za resnico. To pomeni, da mora vsebovati stavek oblike:

(Nenavajalni vzajemni pogojnik za resnico): *»p«* je resničen, če in samo *če p*, kjer je črka »p« shematična črka, ki stoji na mestu stavkov. Primer prve stopnje je lahko preprosto:

»Trava je zelena«, če in samo če je trava zelena.

Ta vzajemni pogojnik kajpada ni dovolj, saj je bil doslej nevtralen glede tega, kako naj bo razumljena desna stran stavka.

Da bi se izognili formalnim zapletom in nedoslednostim, ne moremo preprosto postulirati vseh teh vzajemnih pogojnikov. Moramo jih izpeljati v formalno teorijo. In za to prav tako potrebujemo referenčno relacijo: predpostaviti moramo, da se singularni izrazi in predikati jezika nanašajo. Ta predpostavka je tista, s katero resnica zapušča ontološko nevtralnost. V nekem smislu je lahko tudi referenčna relacija neznavajalna. Upoštevati mora:

(Nenavajalni vzajemni pogojnik za zadostljivost): x zadošča »F«, če in samo če x je F;

(Nenavajalni vzajemni pogojnik za označevanje): *»t«* označuje *x*, če in samo če *t* = *x*.[33]

Nenavajalno definirana referenčna relacija je kajpada relacija beseda-svet. Povezuje besede z objekti. Iz tega sledi, da primeri, kot so »Hamlet« se nanaša

[32] Nekateri filozofi ne verjamejo, da realizem zahteva korespondenco resnice. Navajam Resnika, ki pravi, da:
»Nekateri filozofi verjamejo, da je realizem zavezan stališču, da je resnica odvisna od značilnosti sveta 'tam zunaj'. Če v matematičnem primeru to zgolj pomeni, da so naše teorije resnične ali neresnične, neodvisno od zunanjih dokazov in konstrukcij, potem je to mogoče prilagoditi z uporaba imanentnega, logičnega pojmovanja resnice« [Resnik (1997), stran 32].

[33] Po mnenju Resnika takšno pojmovanje naredi prostor za naše najbolj osnovne realistove intuicije z dovoljenjem, da je resnica neodvisna od naših sedanjih teorij in metod; glej Resnik (1997), str. 15.

na Hamleta, niso nenavajalno definirane referenčne relacije, ker niso relacije svet-beseda. Glede na nenavajalni vzajemni pogojnik za označevanje, za to, da bi se »Hamlet« nanašal na Hamleta, mora obstajati *x*, s katerim je Hamlet iden-

125 tičen. Toda v odsotnosti ontologije fikcijskih objektov, ne obstaja objekt x, ki je identičen s Hamletom.

Močan, ontološko zavezan pojem resnice, ki sem ga tukaj sprejela, ni nezdružljiv z drugimi značilnostmi resnice, ki so jih poudarili tako imenovani »deflacionisti«. Izjave o resnici in neresnici je še vedno mogoče včasih uporabiti kot lingvistične bližnjice za govorjenje o realnosti z nanašanjem na stavke. Kot Quine pravilno pravi, »resničnostni predikat lahko rabi za sredstvo za preklop od govora o realnosti na govor o stavkih«. Če rečem, »Kar Peanovi aksiomi trdijo o zaporedju naravnih števil, je resnično«, resničnostni predikat deluje kot okrajšava, s katero trdim, da je 1 naravno število in da: če je *a* naravno število, potem je (njegov neposredni naslednik) naravno število in tako naprej skozi pet Peanovih aksiomov.