ANαliZA

časopis za kritično misel

Letnik 15, številka 1-2, avgust 2011 · ISSN 1408-2969

FILOZOFIJA MATEMATIKE

Iris Merkač

Uvod: Pomen matematičnih objektov v filozofiji matematike

Filozofska fakulteta Univerze v Mariboru

Citiranje: Iris Merkač, »Uvod: Pomen matematičnih objektov v filozofiji matematike«, *Analiza: časopis za kritično misel* 15, št. 1-2 (2011): 93–103.

To delo je objavljeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva 4.0 Mednarodna (CC BY 4.0), https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.sl.

Izdajatelj: Društvo za analitično filozofijo in filozofijo znanosti, Ljubljana.

Elektronska različica je bila leta 2026 rekonstruirana iz skena tiskane izdaje (OCR, ročno pregledano) in preverjena s tiskano izdajo. Številke strani ustrezajo tiskani izdaji; prelomi strani znotraj prispevka se lahko nekoliko razlikujejo.

Iris Merkač
Filozofska fakulteta Univerze v Mariboru

Uvod: Pomen matematičnih objektov v filozofiji matematike

V klasični matematiki interpretiramo matematične objekte kot števila, množice, funkcije, relacije, matrike itn. Definiranje teh pojmov nam v matematiki ne prinaša težav. V filozofiji po so se, kot posledica problematičnosti definiranja matematičnih objektov, razvile številne teorije.

V pričujočem sestavku smo spregovorili o matematičnem platonizmu, realizmu in anti-realizmu. Pri matematičnem platonizmu smo vzeli pod drobnogled Linnebovo razumevanje matematičnih objektov kot abstraktnih, neodvisnih od nas, našega jezika, mišljenja itn. Vzročna nedostopnost matematičnih objektov nas je privedla do vprašanja, kako je matematika uporabna v svetu konkretnih stvari, če opisuje matematične objekte kot abstraktne. Z uporabnostjo matematike smo se ukvarjali pri fikcionalistu Fieldu, ki trdi, da je matematika uporabna fikcija. Uvideli smo, da se anti-realist Field sklicuje na matematične objekte, ki ne obstajajo in so zgolj fikcija, platonist Linnebo pa na matematične objekte, ki obstajajo, vendar so nam vzročno nedostopni. Iz navedenega smo prepoznali nasprotovanje med filozofskima teorijama. V sestavku pa smo tudi opozorili na različni pomen matematičnih objektov pri matematičnih platonistih in realistih ter se soočili s predstavnikom realistične verzije strukturalizma, filozofom Shapirom. Tukaj smo uvideli, da Shapiro tako kot Linnebo zagovarja obstoj matematičnih objektov, vendar trdi, da so določeni le s strukturalnimi lastnostmi.

Na kratko smo povzeli naše potovanje glede pomena matematičnih objektov skozi filozofijo matematike in upamo da bo naš pogled pomagal bralcu te številke.

Ključne besede: filozofija matematike, realizem, anti-realizem, platonizem, strukturalizem.

***

»... Knjigo filozofije imamo vedno pred očmi, ker pa ni napisana s črkami naše abecede, je ne morejo vsi prebrati; črke v tej knjigi so trikotniki, štirikotniki, krogi, krogle, stožci, piramide in drugi matematični liki, nadvse primerni za njeno branje (93, str. 499-500) Galileo Galilei« (Virčenko, 1990: 28).

»Brez matematike ni mogoče doseči globin filozofije, brez filozofije se ne da doseči matematičnih globin; brez obeh ni mogoče doseči ničesar (252, str. 210) J. B. Borda – Demolins« (Virčenko, 1990: 34).

Filozofija in matematika sta tesno povezani med seboj. Njun preplet izhaja že iz 6. st. pr. n. št., ko so pitagorejci razvili pravo filozofijo števil. Številske elemente so razumeli za prvine vsega eksistirajočega, kar je razvidno iz citata starogrškega filozofa in matematika Pitagore (570 pr. n. št. – 495 pr. n. št.) »Vse stvari so števila«, in pojasnili, da je vse nebo harmonija in število.

Prepričani smo, da števila še danes veljajo za enega najpomembnejših in najmanj jasnih pojmov tako v vsakdanjem življenju kot tudi v filozofiji matematike. Pogosto si zastavljamo vprašanja kot so, kako definirati število, ali je število dva podobno eksistenci dveh stvari, zakaj je število tri pred številom pet, ali znajo živali šteti itn. Vendar preden število definiramo ali ga primerjamo s konkretnimi, fizičnimi objekti ali ga razvrstimo v neki red ali preučimo štetje pri živalih, mora eksistirati pojem abstraktnega števila. Števila namreč razumemo kot abstraktne matematične objekte, ki so plod abstraktnega mišljenja. Zraven števil uvrščamo k abstraktnim matematičnim objektom še množice, funkcije, relacije, matrike itn. Po drugi strani pa pravimo, da so števila matematični objekti, ki eksistirajo in imajo določene lastnosti neodvisno od nas, našega jezika, misli, postopkov itn. Glede na navedeno govorimo o dveh načinih raziskovanja matematičnih objektov. Prvi način zagovarjajo matematični platonisti, drugi pa izhaja iz realizma v filozofiji matematike.

V tem uvodu bomo torej analizirali matematične objekte v filozofiji matematike, na kratko predstavili navedeni teoriji in preverjali eksistenco matematičnih objektov ter njeno delovanje.

1. Platonizem v filozofiji matematike

Termin platonizem izhaja iz imena starogrškega filozofa Platona (427 pr. n. št. – 347 pr. n. št.), ampak njegov platonizem se od »platonizma« v filozofiji matematike precej razlikuje. Najprej si bomo ogledali njegovega in se nato osredinili na matematični platonizem. Platonov platonizem si lahko predstavljamo kot skupek naslednjih tez: po njem obstajata dve vrsti objektov, abstraktni (ideje) in konkretni. Obe vrsti objektov se med seboj razlikujeta. Prvi so zunaj časa in prostora, zato so večni in nespremenljivi, drugi pa so v času in prostoru, zato so minljivi in spremenljivi. Filozof daje tudi prednost spoznavanju idej, pred empiričnim izkustvom, ter pojasni, da spoznamo abstraktne objekte zgolj z razumom (Platon, 2006: 129-130, [78c-79b]). Stališča današnjih platonistov se od Platonovega razlikujejo, ker bi naj po eni strani upoštevali empirično izkustvo, po drugi pa naj bi sprejemali abstraktne objekte, ki so nedosegljivi v vsakem empiričnem izkustvu.

Oglejmo si definicijo matematičnega platonizma, kot jo v sodobni filozofiji matematike podaja filozof Øystein Linnebo, čigar tekst objavljamo v pričujoči številki. Platonizem v filozofiji matematike opredeljuje kot metafizično stališče, da obstajajo abstraktni matematični objekti, ki so neodvisni od nas in našega jezika, mišljenja in postopkov (Linnebo, pričujoča številka). Iz definicije je razvidno tudi filozofovo pojmovanje matematičnih objektov.

Linnebo o matematičnih objektih trdi sledeče:

1. Obstajajo matematični objekti.
2. Matematični objekti so abstraktni.
3. Matematični objekti so neodvisni od razumnih bitij in njihovega jezika, mišljenja in postopkov (Linnebo, pričujoča številka).

Iz Linnebove definicije matematičnega platonizma in njegovega pojmovanja matematičnih objektov vidimo, da filozof definira matematični platonizem kot konjunkcijo obstoja, abstraktnosti in neodvisnosti.

Na primer, analizirajmo izjavo »Število 1 je matematični objekt, ki je neodvisen od naše vednosti«. V prvem delu izjave smo predstavili obstoj in abstraktnost matematičnega objekta, kjer nismo imeli težav. Jasno je namreč, da je število L matematični objekt, ki je resničen za vse in samo objekte, ki jih preučuje čista matematika. Ta matematični objekt je abstrakten, ker ni v času in prostoru in je vzročno nedostopen. V drugem delu izjave pa smo abstraktnemu matematičnemu objektu pripisali neodvisnost od naše vednosti, kjer lahko nastopijo težave. Zanima nas namreč, ali bi naša odsotnost (ne-eksistenca) vplivala na eksistenco matematičnih objektov in hkrati na definicijo matematičnega platonizma. Odgovor bomo poskušali poiskati pri anti-nominalistih, ki zagovarjajo zgolj zvezo obstoja in abstrakcije in opuščajo neodvisnost (Linnebo, pričujoči številka). Iz definicije anti-nominalizma je jasno, da naša odsotnost (ne-eksistenca) ne bi vplivala na eksistenco abstraktnih matematičnih objektov. Zarad opuščanja neodvisnosti pa se anti-nominalizem[1] razlikuje od platonizma tako, da je logično šibkejši.

V nadaljevanju bomo na kratko prikazali, kako je eden izmed najbolj znanih sodobnih platonistov, Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), zavezan eksistenci abstraktnih matematičnih objektov, natančneje števil.

Analizirajmo Fregejevo pojmovanje števil kot abstraktnih matematičnih objektov. Filozof v delu *Osnove matematike* pravi: »... kje pa je število 4? Število 4 ni niti zunaj nas niti v nas. To je, razumljeno v prostorskem smislu, pravilno« (Frege, 2001: 79). Za Fregeja torej krajevno določilo za število 4 nima nobenega pomena, zato ni konkreten objekt, ampak abstrakten. Paziti pa moramo, da števila 4 ne zanikamo nasploh kot objekt; če bi to storili, bi namreč zanikali, da je število abstraktni objekt. Frege torej velja za filozofa, ki sprejema števila kot abstraktne objekte. Na vprašanje, ali je število nekaj subjektivnega ali objektivnega, filozof odgovarja nasprotno kot nekateri psihologisti. Njegov odgovor je razviden iz sledečega citata: »... število ni predmet psihologije ali rezultat psihičnih procesov, enako kot to ni npr. Severno morje. Če je od naše volje odvisno, kateri del splošne vodne površine zemlje bomo razmejili in ga imenovali 'Severno morje', to v ničemer ne vpliva na objektivnost Severnega morja. Zaradi tega morja ne bomo raziskovali po psihološki poti. Tako je tudi število nekaj objektivnega« (Frege, 2001: 49-50). Za Fregeja je torej število nekaj objektivnega, to pa je nekaj, kar ni predmet psihologije. Kaj pa razume pod besedo objektiven, nam razloži na naslednji način: »Objektivno razlikujem od otipljivega, prostorskega, dejanskega. Zemljina os in masno središče sončnega sistema sta objektivna, drugače kot za Zemljo pa ne bi rekel, da sta dejanska. Pogosto rečemo, da je ekvator zamišljena linija, napačno pa bi ji bilo reči izmišljena linija; ni nastala z mišljenjem, ni rezultat kakšnega duševnega

[1] Zanikanje anti-nominalizma prinaša nominalizem, ki zavrača eksistenco abstraktnih objektov in daje v ospredje konkretne objekte.

procesa, temveč jo je mišljenje samo spoznalo, zgrabilo« (Frege, 2001: 50). Filozof spozna, da z mišljenjem odkrivamo realnost nekega pojma.

Nadalje si bomo ogledali, na podlagi česa trdimo, da je Fregejev pojem števila tesno povezan z njegovim pojmovanjem eksistence. Videli smo že, da filozof zavrača, da je število lastnost zunanjih reči. Glede nosilcev števila pa trdi sledeče: »Če lahko kakšen predmet z isto pravico imenujem zelen ali rdeč, je to znak, da ta predmet ni pravi nosilec zelenosti. Pravi nosilec zelenosti je šele ploskev, ki je samo zelena. Tako tudi predmet, ki mu lahko z isto pravico pripišemo različna števila, ni pravi nosilec števila« (Frege, 2001: 46). Osrednja razlika med barvo in številom je torej, da barva neke ploskve ni odvisna od naše volje. Na primer, neki knjigi lahko pripišemo poljubna števila glede na naše dojemanje te knjige, pripišemo ji lahko število strani ali število poglavij. Nosilci števila so torej pojmi in ne predmeti, tem namreč lahko pripišemo različna števila, pojmom pa ne. Kako so po Fregeju števila povezana z eksistenco pa zasledimo v naslednjem citatu: »V tem pogledu je eksistenca podobna številu. Zatrditev eksistence ni pač nič drugega kot zanikanje števila nič« (Frege, 2001: 73). Podobnost med eksistenco in številom je v tem, da število ni določilo pojma. Eksistenca in število torej pojma ne določata, vendar sta zgolj lastnosti pojma.

Na podlagi natančne logične analize Fregejevih prepričanj spoznamo, da je zavezan eksistenci abstraktnih matematičnih objektov.

V pričujočem sestavku bomo tudi raziskali Linnebov najpomembnejši argumenta za eksistenco abstraktnih matematičnih objektov. Argument izvira iz Fregeja, zato ga imenuje Fregejev argument. Linnebo trdi, da je njegova struktura splošna in abstraktna, se razlikuje od Fregejevega lastnega zagovora eksistence matematičnih objektov in je podoben Fregejevemu stališču, da je matematika, natančneje aritmetika oziroma teorija števil, zreducirana na logiko (Linnebo, pričujoča številka). To stališče imenujemo logicizem in je eden izmed načinov, v katerem je razvit Fregejev argument za eksistenco.

Fregejev argument temelji na dveh premisah. Prva se nanaša na semantiko matematičnega jezika, druga pa na resnico.

Premisa 1: Singularni izrazi matematičnega jezika naj bi se nanašali na abstraktne matematične objekte, njegova kvantifikatorja prvega reda pa bi naj segala preko takih objektov.

Premisa 2: Veliko število stavkov, ki so sprejeti kot matematični teoremi, je resničnih.

Pri prvi premisi besedno zvezo »naj bi« razumemo kot: zato da bi bil neki stavek S resničen, mora S biti uspešen pri nanašanju ali kvantificiranju na ta način (Linnebo, pričujoča številka). Prva premisa tudi izvira iz klasične semantike, ki trdi, da se matematični jezik obnaša podobno kot ne-matematični jezik. Zdi se tudi, da imata jezika enako semantično strukturo. Na primer, stavka »Pet je naravno število« in »Petra je zaljubljena« imata enako preprosto semantično

strukturo predikata, ki je pripisan subjektu.[2] Glede druge premise pa Linnebo poda tri različne načine zagovorov, ki imajo enak cilj. Filozof želi dokazati, da najprej identificiramo standard, s katerim so resničnostne vrednosti izjav določene in nato dokazujemo, da ta standard dokazujejo matematični teoremi. Oglejmo si način, ko se filozof sklicuje na standard, ki je osnovnejši od matematike. Linnebo za primer ponuja logicizem. Frege in ostali logicisti trdijo, da je katerikoli teorem čiste logike resničen. Nato želijo dokazati, da so lahko teoremi iz določenih vej matematike izpeljani iz čiste logike in samih definicij (Linnebo, pričujoča številka). Po drugi premisi je torej večina matematičnih teoremov resničnih. Če si zamislimo, da je S tak stavek, potem s klasično semantiko resničnost stavka S zahteva, da so njegovi singularni termini uspešni pri nanašanju na abstraktne matematične objekte. Torej eksistirajo abstraktni matematični objekti, na katere se ti izrazi nanašajo ali preko katerih kvantificirajo (Linnebo, pričujoča številka).

Kljub Fregejevemu argumentu, pa so filozofi razvili različne ugovore proti matematičnemu platonizmu. Na kratko bomo predstavili metafizični ugovor proti matematičnemu platonizmu, ki ga v članku »What numbers could not be« razvija filozof Paul Joseph Salomon Benacerraf (rojen 1931).

V klasični matematiki so se pojavili poskusi reduciranja vse matematike na množice. To pomeni, da lahko števila istovetimo z različnimi množicami, njihove teoreme pa je mogoče dokazati iz aksiomov teorije množic[3] (Trobok, ma. 66). Možno je torej, da so števila identična z množicami na različne načine.

Spodnja tabela prikazuje, kako sta števila reducirala na množice matematika John von Neumann (1903-1957) in Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953).

von Neumannova redukcija	*Zermelova redukcija*
$0 = \phi$	$0 = \phi$
$2 = (\phi)$	$2 = (\phi)$
$3 = \{\phi, (\phi), \{\phi, (\phi)\}\}$	$3 = \{\{(\phi)\}\}$
⋮	⋮

Tabela 1: Redukciji števil na množice.

Zgornji redukciji števil na množice v matematiki ne povzročata težav. Filozof Benacerraf pa zazna težave, ko želi poiskati resničnostno vrednost števila 3

[2] V predikatni logiki vsak stavek razdelimo na dva dela, to je subjekt in predikat. Subjekt (osebek) v stavku predstavlja del o katerem govorimo, predikat (povedek) pa del, ki o subjektu nekaj govori. Osnovni stavek v predikatni logiki tako imenujemo subjektno-predikatni stavek (Šuster, 2000: 166).

[3] Teorija množic velja za osnovo vseh sodobnih matematičnih teorij. Osnovna pojma teorije množic sta »množica« in relacija »je element«, ki ju običajno aksiomatiziramo z Zermelo-Fraenkelovi aksiomi. Utemeljitelj teorije množic pa je Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918).

(Benacerraf, 1965: 56). Na vprašanje, ali lahko objekt, {(H)}}, nadomestimo s številom 3, odgovarja negativno. Filozof navaja: »'Objekti' sami ne opravljajo funkcije števil; torej, bodisi jo opravlja sistem kot celota bodisi je ne opravlja nič...števila ne bi mogla biti množice« (Benacerraf, 1965: 69). Iz spoznanja, da števila ne morejo biti množice, filozof izpelje, da števila niso objekti: »Potemtakem števila sploh niso objekti, ker pri podajanju lastnosti ... števil, le opredeliš abstraktno strukturo – in razlika leži v dejstvu, da 'elementi' strukture nimajo lastnosti, razen tistih, ki so v zvezi z drugimi 'elementi' enake strukture« (Benacerraf, 1965: 70). Vsakršno istovetenje števil z objekti torej zavrača, zanima pa ga le številska struktura.

Filozofinja Majda Trobok, katere tekst objavljamo v pričujoči številki, interpretira Benacerrafa kot eliminativističnega strukturalista, ki zagovarja, da »števila niso nič drugega kot mesta v strukturi naravnih števil« (Trobok, pričujoča številka). Na primer, glede števila 4 bi Benacerraf dejal, da ni samostojni objekt, ampak je le četrto mesto v strukturi. Nalogo števila štiri torej igrajo različni objekti, lahko so poglavja v knjigi, ki si sledijo po točno določenem zaporedju, pomembno pa je le, da ta sistem upodablja strukturo naravnih števil. Benacerraf nas tudi opozori, da lahko »vsak objekt igra vlogo« (Benacerraf, 1965: 70) nekega števila. Števila torej niso objekti, temveč vloge. Vrnimo se k primeru o številu 4. Posamezni objekt torej igra vlogo števila 4 in sam ni identičen s tem številom. Štiri poglavja v knjigi, ki zajemajo četrto mesto v zaporedju, so posamezni objekti, ki opravljajo vlogo števila štiri. Ker Benacerraf ne odobrava istovetenja števil z objekti, po njem številniki nimajo posameznih referentov, na primer abstraktnega števila 4. Navedenega platonisti, ki zagovarjajo eksistenco števil kot abstraktnih matematičnih objektov – neodvisnih od nas, ne odobravajo, zato govorimo o Benacerrafovem ugovoru proti matematičnemu platonizmu.

V nadaljevanju bomo na kratko predstavili matematične objekte pri realistih in anti-realistih v filozofiji matematike.

2. Realizem in anti-realizem v filozofiji matematike

Za začetek interpretirajmo splošni realizem, po Trobokovi. Splošni realizem zagovarja, da objekti eksistirajo objektivno, neodvisno od nas, naših prepričanj, konstrukcij ter naših jezikovnih in spoznavnih postopkov in da so naša prepričanja o teh objektih objektivno resnična ali neresnična; v glavnem, da so ta prepričanja resnična (Trobok, pričujoča številka). Tako definiran realizem je sestavljen iz dveh delov. Prvi obravnava eksistenco objektov in njihovih dejstev kot, na primer, »Miza je lesena«, drugi pa se ukvarja z dejstvom, da »Miza obstaja in je iz lesa«, četudi kdo ne razmišlja tako. Prvi del realizma imenujemo, kot sta ga poimenovala filozofinja Trobokova in filozof Stewart Shapiro (rojen

1951), »realizem o ontologiji«[4], drugi del pa »realizem o resničnostni vrednosti«[5].

Realizem v filozofiji matematike sicer definiramo na enak način kot splošni realizem, vendar namesto konkretnih objektov uporabimo matematične objekte. Preprosto povedano, je matematični realizem konjunkcija realizma o ontologiji in realizma o resničnostni vrednosti. Realizem o ontologiji zagovarja idejo, da matematični objekti obstajajo neodvisno od naših prepričanj, konvencij, naših matematičnih postopkov itn. Realizem o resničnostni vrednosti pa zagovarja idejo, da so matematične izjave objektivno resnične ali neresnične, neodvisne od naše zmožnosti določanja njihove resničnostne vrednosti in na splošno, da so v skladu z našimi prepričanji (Trobok, pričujoča številka). Zagovorniki tega stališča so Willard Van Orman Quine (1908-2000), Hilary Whitehall Putnam (rojen 1926), Michael Resnik (rojen 1938), Penelope Maddy in Shapiro Trenutni razmislek kaže, da se pomen matematičnih objektov, kot jih obravnavajo matematični platonisti in realisti, med seboj razlikuje. Na primer, matematični platonisti bi glede števila 7 v matematični izjavi »Število 7 je praštevilo« dejali, da je abstrakten matematični objekt. Število 7 ni konkreten objekt, kot na primer šolska tabla ali kreda, ker ni prostorsko-časovno lociran. Zraven tega pa bi tudi povedali, da število 7 eksistira neodvisno od razumnih bitij, njihovega mišljenja, postopkov itn. Slednji stavek bi zagovarjali tudi matematični realisti in zraven njega dodali, da je matematična izjava o številu 7 objektivno resnična, neodvisno od naše zmožnosti določanja njene resničnostne vrednosti.

Oglejmo si pomen matematičnih objektov pri predstavniku realistične verzije strukturalizma, Stewartu Shapiru. Glede na to, da se ponovno srečujemo s strukturalizmom,[6] bomo najprej pojasnili definicijo strukturalizma. Strukturi – ližem razumemo kot stališče, ki nasprotuje platonizmu,[7] saj se ne ukvarja s posameznimi matematičnimi objekti kot neodvisnimi bitnostmi, vendar ga zanim celotna struktura, ki jo tvorijo naravna števila. Na primer, glede števila 7 strukturalisti dejali, da je le sedmo mesto znotraj strukture naravnih števil, torej je po njihovem mnenju nesmiselno govoriti o njem kot o nečem neodvisnem od celotne strukture naravnih števil.

Vrnimo se k Shapiru, ki nas v svojih delih pogosto nagovori s sloganom »matematika je znanost o strukturi« (Shapiro, 2000:267). Filozof zagovarja, da »matematični objekti, množice obstajajo neodvisno od matematike« (Shapiro, pričujoča številka), na podlagi česar ga uvrščamo k realistom o ontologiji. Po njem predmet aritmetike ni določena zbirka abstraktnih objektov. Aritmetika pa je o strukturi naravnih števil (Shapiro, pričujoča številka). Glede strukture naravnih števil Shapiro jasno pove, da je »ponazorjena z neskončnim

[4] V nekaterih filozofskih tekstih filozofi »realizem o ontologiji« nadomestijo z »znanstvenim realizmom« ali »notranjim realizmom« (Trobok, pričujoča številka).

[5] »Realizem o resničnostni vrednosti« nekateri filozofi nadomestijo z »metafizičnim realizmom« ali »zunanjim realizmom« (Trobok, pričujoča številka).

[6] S predstavnikom eliminativističnega strukturalizma, filozofom Benacerrafom in njegovim ugovorom proti matematičnemu platonizmu, smo se ukvarjali v prvem poglavju.

[7] Za definicijo platonizma glej prvo poglavje.

zaporedjem različnih trenutkov časa, arabskih števil...je oblika, skupna z vsemi temi sistemi« (Shapiro, pričujoča številka). V skladu s Shapirom verjamemo, da imajo matematični objekti, kot so števila, resnično pomen le kot celota, opisujemo pa jih le s strukturalnimi lastnostmi.

Iz Shapirovega dela *Thinking about Mathematics* je razvidno, da filozof razlikuje dva pogleda na strukture in mesta v teh strukturah (Shapiro, 2000: 264). Prvič vzame mesta kot različne vloge. Trdi, da to stališče predpostavlja ontologijo, ki zajema tiste objekte, ki zapolnijo mesta oziroma vloge v strukturah (Shapiro, 2000: 268). Filozof daje poudarek osebam, na primer predsednikom držav, ki opravljajo določene vloge. Le te jemlje za prave referente singularnih izrazov, medtem ko pravi »položaji strukture so prej lastnosti kot objekti« (Shapiro, 2000: 268). Torej, položaj v strukturi, kot je predsednik države, je bolj podoben lastnosti, ki jo pripisujemo posamezniku. Drugi pogled popredmeti mesta v strukturah. Mesta v strukturah so torej referenti – abstraktni objekti, na katere se nanašajo imena političnih položajev (Shapiro, 2000: 268).

V grobem smo tako spoznali Shapirovo razumevanje matematičnih objektov, nadalje pa bomo na kratko predstavili, kaj trdijo o matematičnih objektih matematični anti-realisti.

Filozofe, ki zanikajo, da so naša matematična prepričanja objektivno resnična glede na matematične objekte, ki eksistirajo neodvisno od naših intuicij, konstrukcij in matematičnega postopka, imenujemo anti-realisti v filozofiji matematike (Trobok, pričujoča številka). Shapiro o anti-realistih trdi naslednje: »so skeptični glede teorije množic, vsaj če je vzeta dobesedno, in sprejemajo vsaj neke oblike modalnosti[8]« (Shapiro, pričujoča številka). Hkrati nas tudi opozori, da so ti filozofi manj skeptični glede modalnosti kot glede teorije množic. Skratka, prepričan je, da so anti-realisti sklenili preoblikovati matematiko ali nekaj, kar igra vlogo matematike, v modalne izraze (Shapiro, pričujoča številka).

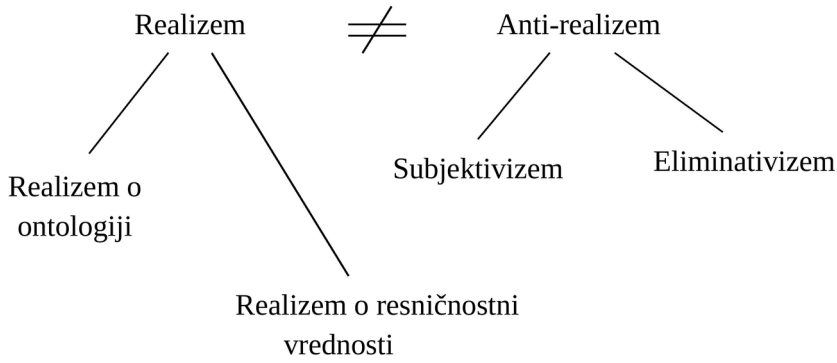
Anti-realizem Trobokova razdeli v dve skupini, med:

1. subjektiviste in
2. eliminativiste.

Prvi zagovarjajo, da so matematični objekti kot tudi dejstva, subjektivni, odvisni od nas. Drugi pa trdijo, da značilne matematične resnice ne eksistirajo: skoraj celotna matematika je dobesedno neresnična (Trobok, pričujoča številka). Predstavniki anti-realistične teorije so Hartry H. Field (rojen 1946), Geoffrey Hellman, Charles C. Chihara, Michael Dummett (rojen 1925), Simon Blackburn (rojen 1944).

[8] V modalni logiki obstaja več načinov, kako izrazimo modalnost, na primer, z »nujno« in »možno«. (Šuster, 2000: 11). Oba izraza sta modalna operatorja nad propozicijami. Propozicija pa je smisel oziroma vsebina stavka. Filozof Shapiro nas opozori na uporabo modalnih pojmov pri anti-realistih kot osnovnih. Kar pomeni, da je modalna terminologija uporabljena »po prvem vtisu«, torej ni reducirana na nekaj ne-modalnega (Shapiro, 1993:456).

Spodnja preglednica predstavlja splošno sliko stališč, ki jih je razvila filozofinja Trobokova na področju realizma in anti-realizma v filozofiji matematike.



Shema 1: Prikaz osnovne delitve matematičnega realizma in anti-realizma po filozofinji Trobokovi

Nazadnje se bomo posvetili še Fieldovemu razumevanju matematičnih objektov. Najprej bomo predstavili njegovo filozofijo, iz nje pa bomo izpeljali njegov pomen matematičnih objektov.

Fieldov program je poskus načelne eliminacije abstraktnih matematičnih objektov iz naravoslovnih znanosti. Njegov cilj je dokazati, da je znanost lahko uspešna brez matematike, vendar ni nujno, da je znanost uspešna samo na ta način (Shapiro, pričujoča številka). To stališče imenujemo Fieldov fikcionalizem.

Shapiro predlaga, da si zamislimo filozofa, ki je skeptičen glede matematike ali njene ontologije. Ta sicer opazi, da je matematika nujna za znanost. Toda tukaj ne gre za »tezo o nujnosti« (Shapiro, pričujoča številka), vendar se mu zdi pravilna. Znanost je namreč običajno delovala z matematiko in filozof ne pozna druge alternative. Matematiko in njene utemeljitve, na primer, v teoriji množic, pa filozof nerad sprejema. Nato po nekaj mesecih učenja matematike pridobi model-teoretsko pojasnilo logične možnosti in logične posledice[9] (Shapiro, pričujoča številka). Po Fieldu lahko zdaj filozof upravičeno trdi, da je matematika nujna za znanost, hkrati pa lahko uredi, da ta teza ni resnična. Da matematika ni nujna za znanost, filozof dokaže, čim razume nujnost v model-teoretskih izrazih. To odkritje verjetno uniči filozofovo začetno sprejemanje matematike. Tako filozof, če zavrne matematiko, izgubi uvid, da je teza, po kateri je matematika nujna, zmotna. Torej nima več jasne ideje o pomenu nujnosti (Shapiro, pričujoča številka).

Fikcionalizem je torej ugovor na Quine-Putnamov argument, ki trdi da je matematika nepogrešljiva v znanosti.

[9] Logični pojem možnosti in logični pojem posledice sta pomembna pri zagovarjanju nujnosti matematike za znanost. Sprejeta sta, ker sta bila reducirana na teorijo množic, s pomočjo teorije modela – kljub prevladujočemu anti-redukcionističnemu duhu. Na primer, propozicija, je predstavljena kot logično možna, če in samo če obstaja model, ki jo zadovoljuje (Shapiro, pričujoča številka).

Shapiro pa Fieldov fikcionalizem interpretira tudi na naslednji način: »Ideja je misliti o matematičnih objektih kot o Akcijskih likih. Število tri in prazna množica imata enaki status kot Oliver Twist« (Shapiro, 2000: 227). Iz citata je razvidno, da je za Fielda matematika fikcija, matematične izjave zavrača, ker ne ustrezajo matematični realnosti.

Po Fieldu se torej izognemo uporabi matematike v znanosti. Filozof sicer podpira resničnostne vrednosti matematičnih izjav, vendar obenem pojasnjuje, da so prazne (Shapiro, pričujoča številka). Na primer, izjavo »Število 5 je naravno število« ima za resnično, vendar zanj števila ne eksistirajo[10]. Od tod se vsaj malo vidi, da je Field anti-realist.

V grobem smo torej spoznali, da Field razume matematične objekte kot Akcijske like in ne priznava njihove eksistence.

Zaključek

V klasični matematiki interpretiramo matematične objekte kot števila, množice, funkcije, relacije, matrike itn. Definiranje teh pojmov nam v matematiki ne prinaša težav. V filozofiji pa so se, kot posledica problematičnosti definiranja matematičnih objektov, razvile številne teorije.

V pričujočem sestavku smo spregovorili o matematičnem platonizmu, realizmu in anti-realizmu. Pri matematičnem platonizmu smo vzeli pod drobnogled Linnebovo razumevanje matematičnih objektov kot abstraktnih,[11] neodvisnih od nas, našega jezika, mišljenja itn. Vzročna nedostopnost matematičnih objektov nas je privedla do vprašanja, kako je matematika uporabna v svetu konkretnih stvari, če opisuje matematične objekte kot abstraktne. Z uporabnostjo matematike smo se ukvarjali pri fikcionalistu Fieldu, ki trdi, da je matematika uporabna fikcija. Uvideli smo, da se anti-realist Field sklicuje na matematične objekte, ki ne obstajajo in so zgolj fikcija, platonist Linnebo pa na matematične objekte, ki obstajajo, vendar so nam vzročno nedostopni. Iz navedenega smo prepoznali nasprotovanje med filozofskima teorijama. V sestavku pa smo tudi opozorili na različni pomen matematičnih objektov pri matematičnih platonistih in realistih ter se soočili s predstavnikom realistične verzije strukturalizma, filozofom Shapirom. Tukaj smo uvideli, da Shapiro tako kot Linnebo zagovarja obstoj matematičnih objektov, vendar trdi, da so določeni le s strukturalnimi lastnostmi.

Na kratko smo povzeli naše potovanje glede pomena matematičnih objektov skozi filozofijo matematike in upamo da bo naš pogled pomagal bralcu te številke.

[10] Shapiro interpretira Fielda kot avtorja, ki jemlje matematični jezik po prvem vtisu. Pojasnjuje, da Field trdi, da matematični objekti ne eksistirajo, matematične propozicije pa imajo objektivne vendar prazne resničnostne-vrednosti (Shapiro, 2000:226).

[11] Linnebo pravi, da so abstraktni matematični objekti izven časa in prostora ter so (zato) vzročno nedostopni (Linnebo, pričujoča številka).

INTRODUCTION: THE MEANING OF MATHEMATICAL OBJECTS IN THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

Mathematical objects in classical mathematics are interpreted as numbers, sets, functions, relations, matrix etc. The definitions of these notions in mathematics are not troublesome. On the contrary, in philosophy – as a consequence of difficulty to define a mathematical object – there were developed numerous theories. In this paper we tackle the platonism, realism, and anti-realism in mathematics. In mathematical platonism we consider Linnebo's understanding of mathematical objects as abstract entitities, independent of us, our thoughts, language, and practice. Causal inaccessibility of mathematical objects led us to the question how useful is mathematics in the domain of concrete things if it is supposed to describe mathematical objects as abstract. We consider the usefullness of mathematics in Field's theory, who is a fictionalist and claims that mathematics is a useful fiction. We realized that anti-realist Field appeals to the mathematical objects that do not exist and are only fiction while platonist Linnebo appeals to the mathematical objects which do exist but are causal inaccessible to us. From this evidence we concluded that these two philosophical theories are sharply adversative. In the paper we also pointed to the different meaning of mathematical objects at mathematical platonist and realist and confronted with the representative of realistic version of structuralism, namely Shapiro. We realized that Shapiro, like Linnebo, advocates the existence of mathematical objects, but claims that only structural features define these objects.

Keywords: philosophy of mathematics, realism, anti-realism, platonism, structuralism

Literatura

Benacerraf, P. (1965). »What numbers could not be«. *Philosophical Review*, 74, št. 1, str. 47-73.

Frege, G. (2001). *Osnove aritmetike in drugi spisi.* Ljubljana: Krtina.

Platon (2006). *Fajdon.* V Platon *Zbrana dela I*, Celje: Mohorjeva družba, prevedel Gorazd Kocjančič.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about Mathematics.* New York: Oxford University Press.

Šuster, D. (2000). *Simbolna logika. Maribor*: Pedagoška fakulteta.

Trobok, M. (2006). *Platonism in the Philosophy of Mathematics.* Rijeka: Faculty of Arts and Sciences.

Virčenko, N. A. (1990). *Matematika v aforizmih, citatih in izrekih.* Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov.