

O INTERPRETACIJAH VERJETNOSTI

Sprejeto

22. 8. 2023

Pregledano

22. 10. 2023

Izdano

22. 12. 2023

BORUT TRPIN

Univerza v Mariboru, Filozofska fakulteta, Maribor, Slovenija
borut.trpin1@um.si

DOPISNI AVTOR

borut.trpin1@um.si

Ključne besede

verjetnost,
interpretacije verjetnosti,
spoznavna teorija,
filozofija znanosti,
filozofija statistike

Izvleček O verjetnosti pogosto govorimo v povsem vsakdanjem kontekstu in jo intuitivno razumemo. Težava nastane, ko skušamo natančneje definirati, kaj verjetnost je. Neenotnost se odraža v velikem številu različnih teoretičnih interpretacij verjetnosti. Za boljše razumevanje pluralnosti pristopov je v prvem delu prispevka podan kratek zgodovinski pregled razvoja interpretacij verjetnosti in verjetnostnega računa. V drugem delu so predstavljene in kritično ovrednotene različne ključne interpretacije: klasična, logična, subjektivna, frekventistična in propenzitetna. Prispevek se zaključi s kratko analizo, kako so interpretacije verjetnosti vpete v širši filozofski kontekst in izpostavi eno izmed odprtih vprašanj na tem področju: vprašanje nenatančne verjetnosti.

KANT AND SCHILLER: MORAL LAW, INCLINATIONS, AND VIRTUE - PART I

BORUT TRPIN

University of Maribor, Faculty of Arts, Maribor, Slovenia
borut.trpin1@um.si

CORRESPONDING AUTHOR
borut.trpin1@um.si

Accepted
22. 8. 2023

Revised
22. 10. 2023

Published
22. 12. 2023

Abstract We often talk about probability in a completely everyday context and understand it intuitively. The problem arises when we try to define more precisely what probability is. The heterogeneity is reflected in the large number of different theoretical interpretations of probability. For a better understanding of the plurality of approaches, the first part of the paper provides a brief historical overview of the development of interpretations of probability and probability calculus. In the second part, various key interpretations are presented and critically evaluated: classical, logical, subjective, frequentist, and the propensity interpretation. The paper concludes with a brief analysis of how interpretations of probability are embedded in a broader philosophical context and highlights one of the open issues in this field: imprecise probabilities.

Keywords
probability,
interpretations of
probability,
epistemology,
philosophy of science,
philosophy of statistics

1 Uvod

Verjetnost je en izmed ključnih pojmov v statistiki, pogosto pa ta pojem nastopi tudi v vsakdanjih pogovorih. Bralec teh vrstic je morda celo pomislil: »Ta prispevek bo *verjetno* zanimiv, saj me tema zelo zanima.« Kaj točno pa naj bi verjetnost sploh bila? Podobno kot Avguštin v znanem odgovoru na vprašanje, kaj je čas, lahko rečemo: »Ko me nihče ne vpraša, kaj je verjetnost, verjetno še najbolj vem, kaj je.« Vseeno pa je problem z verjetnostjo nekoliko drugačne narave kot problem časa. Verjetnost je namreč (za večino) teoretičen pojem, ki opiše naravo dogodkov in naše dojemanje sveta, ne pa neka fizična količina.

Enotne definicije verjetnosti prav zaradi njene teoretične narave in mnogih nasprotujočih interpretacij nimamo. Najširša teoretična definicija verjetnosti, pod katero bi lahko zajeli največ nasprotujočih pogledov, bi bila tako sledeča:

(Def1) *Verjetnost je stopnja možnosti, da se zgodi nek dogodek.*

Definicija je zelo široka in posledično informativno šibka, zato velja opozoriti na nekaj pomanjkljivosti. Prvi ugovor lahko izpostavimo zoper prvi del definicije: ali je verjetnost res številčna opredelitev? Kot bomo videli kasneje, je v zadnjih desetletjih v porastu zanimanje za t.i. nenatančno verjetnost, ki ni podana z diskretnimi števili, temveč z intervalom števil (za pregled zgodovine nenatančne verjetnosti glej Coolen et al., 2010). Ugovor lahko podamo tudi zoper drugi del definicije, kjer je sporen predvsem pojem »stopnja možnosti«. Zdi se, da je definicija na tem mestu krožna. Kaj naj bi pojem »stopnja možnosti« namreč sploh pomenil? V angleščini se uporablja pojem *likelihood*, ki pomembno nastopa tudi v t.i. *likelihood principle*, principu stopnje možnosti, da so neki podatki resnični, če je neka hipoteza resnična. Ta plodovit princip nas na tem mestu ne bo zanimal. Velja pa opozoriti na krožnost definicije verjetnosti, ki operira s pojmom stopnje možnosti [*likelihood*], saj sta si oba pojma zelo sorodna. Stopnja možnosti je sicer nekoliko bolj specifična kot verjetnost, vseeno pa se krožnosti v polni meri zavemo, ko definicijo karikiramo na sledeč način:

(Def 1*) *Verjetnost je opredelitev verjetnosti, da se zgodi nek dogodek.*

Na ravni najširše definicije verjetnosti do takih težav sicer prihaja predvsem zato, ker skušamo zajeti čimveč značilnosti nasprotujočih tolmačenj verjetnosti. Različnih tolmačenj pa je kar nekaj. V okvirnem vrstnem redu njihovega nastanka naštejmo le glavne, ki se jim bom posvetil v nadaljevanju. Za vse od naštetih je sicer značilno, da verjetnost razumejo kvantitativno – kot številčno opredeljivo:

1. klasično in logično razumevanje verjetnosti,
2. Bayesovsko (subjektivno in objektivno) razumevanje verjetnosti,
3. frekventistično (statistično) razumevanje verjetnosti,
4. verjetnost kot fizikalna lastnost (propenziteta).

Vprašanje pluralizma, tj. ali lahko različne interpretacije služijo v različnih kontekstih, zaenkrat puščam na strani. Epistemološke interpretacije (klasična, logična, Bayesova), ki verjetnost opredeljujejo preko naše vednosti, lahko plodovito uporabljamo za razlage, kjer je v ospredju posameznikovo mišljenje. Pri tem se lahko naslonimo na Laplacovo zgodnjo (in nemara nekoliko prekomerno) izjavo: »Teorija verjetnosti je v končnem smislu zgolj omejitev zdravega razuma z računanjem« (Laplace, [1814] 1952, 196).

Podobno velja za frekventistično interpretacijo in verjetnost kot propenziteto, ki ju lahko plodovito uporabljamo v razlagah, kjer imamo opravka z opazljivimi dogodki. Če smo prej govorili o epistemoloških interpretacijah, so v teh primerih v rabi različna imena: znanstvena, aleatorna interpretacija, tudi Popprova oznaka *objektivna interpretacija* (Gillies, 2000, 20). Seveda je na tem področju veliko nestrinjanja: nekateri so mnenja, da je vsaka verjetnost v nekem smislu epistemološka, spet drugi svarijo pred težavami epistemoloških interpretacij (npr. Popper, 1998, 26). Poleg tega je lahko sporno tudi to, da klasično in logično interpretacijo postavljamo v isto skupino z Bayesovo, saj sta prvi dve bistveno bolj pozunanjeni in ju zato lahko uvrščamo tudi med objektivne interpretacije. Med epistemološke ju uvrščamo le zaradi osnovnega izhodišča, tj. da nimamo vednosti, kaj se bo zgodilo.

Za začetek poudarimo samo glavne razlike. Za *klasično interpretacijo* verjetnosti (kjer sta bila za razvoj glavna Bernoulli ([1713] 2006) in Laplace ([1814] 1952)) je značilno, da verjetnost dogodka opredeli kot razmerje med številom pojavitev želenega izida in številom vseh izidov, pri čemer so vsi izidi enakovredni. Veliko vlogo pri klasičnem razumevanju igra matematična kombinatorika, zato jo lahko imenujemo tudi kombinatorična verjetnost. *Logična verjetnost* pomeni direktno, a mnogo

kompleksnejšo izpeljavo klasične interpretacije, verjetnost pa razume kot logično razmerje. *Frekventistično razumevanje* verjetnosti je v nekem smislu nadgradnja teh dveh razumevanj, s pomembno razliko, da k verjetnosti ne pristopa z vnaprejšnjim izračunom, temveč preko statističnega razmerja relativnega pojavljanja (empirično) opazovanega dogodka. To razumevanje verjetnosti je eno izmed najbolj razširjenih v znanosti, saj je matematično zelo izpopolnjeno, omogoča pa tudi dobre napovedi. *Propenzitetna verjetnost* pa temelji na tem, kot je razvidno že iz imena, da verjetnost ni le teoretičen princip, temveč opredeljuje nagnjenost (propenziteto) dejanskih situacij, v katerih izvajamo verjetnostni poskus, k določenim izidom. S tem skuša odpraviti nekaj pomanjkljivosti frekventističnih interpretacij (npr. težave pri poskusih s samo enim izidom). Ravno obratno pa je *bayesovsko razumevanje verjetnosti*. Ne zanima jih pogostost izidov, temveč stopnja posameznikovega prepričanja, da se bo nek dogodek zgodil. Temelji torej na obratu od zunanjega opazovanja verjetnosti k pripisovanju verjetnosti še neopaženih dogodkov. Ideja t.i. obratne verjetnosti je stara (glej Dale, 1995), ime pa je dobila po Thomasu Bayesu. Bayes, angleški duhovnik, statistik in filozof, je v 18. stoletju v svojih posthumno izdanih spisih ustvaril eno ključnih matematičnih enačb te interpretacije, Bayesov teorem (Bayes, 1763). Enega vplivnejših vzponov je ta interpretacija sicer dosegla šele v zadnjih desetletjih. Za razliko od ostalih se torej Bayesovci (kot se oz. so pripadniki te šole včasih imenovani) ukvarjajo s stopnjo prepričanja, bistveno večjega pomena pa je zanje tudi pogojna verjetnost.

2 Osnovni pojmi

Pred nadaljevanjem moramo pojasniti tri ključne pojme, ki nastopajo v skoraj vseh razpravah o verjetnosti in sem jih tudi v tej razpravi že uporabil: verjetnostni poskus, dogodek in izid. Za primer vzemimo verjetnost lihega števila pri metu običajne igralne kocke.

Ko govorim o (verjetnostnem) poskusu, se s tem ne nanašam nujno na znanstveni poskus. Oznaka verjetnostni poskus označuje zgolj poskus, v katerem je rezultat odvisen od naključja, pri čemer pa poskus ni nujno tudi fizično izveden. V primeru kocke je verjetnostni poskus sam met. Verjetnostni dogodek sestavlja množica elementarnih izidov in predstavlja osnovo verjetnostnega računa. V našem primeru določamo verjetnost dogodka padec lihega števila. Ta dogodek pa je sestavljen iz treh elementarnih izidov: padca števila 1, 3 ali 5. Dogodek je lahko tudi enak izidu, če npr. govorimo o padcu točno določenega števila. V posebnih primerih, ko je

množica izidov dogodka prazna, govorimo o nemogočem dogodku, npr. padec negativnega števila. Podobno o univerzalnem dogodku govorimo, ko je dogodek enak množici vseh izidov verjetnostnega poskusa, npr. padec poljubnega števila pri metu kocke.

3 Kratka zgodovina verjetnosti

Ljudje¹ imamo z verjetnostjo opravka že od nekdaj, saj zaradi omejenih kognitivnih sposobnosti in/ali nejasnih okoliščin skoraj nikoli nismo povsem prepričani o svojem ravnanju in mišljenju. To pa še ne pomeni, da vedenje zahteva razmislek o verjetnosti. Skozi zgodovino se je namreč pokazalo, da so vprašanja o verjetnosti največkrat vzniknila šele ob igrah na srečo in ne ob vsakdanjih dejavnostih.

Kockanje in druge igre na srečo so sicer ena izmed najstarejših človeških razvedril. Arheološki viri kažejo, da so se igre na srečo pojavljale že v pradavnini (David, 1998). Kljub temu do pravega razvoja teorij(e) verjetnosti ni prišlo ravno hitro. Gillies (2000, 22-23), denimo, opozarja, da so bili antični Grki odlični matematiki in kot razloge, zakaj niso razvili vsaj zametkov verjetnostnega računa, navaja, da so se ukvarjali predvsem z geometrijo, ne pa toliko z aritmetiko in algebro, ki sta ključni za razvoj verjetnostnega računa. Poleg tega navaja tudi bolj preprost razlog: verjetnostni račun se je najprej začel razvijati ob računanju izidov kockanja (v 17. stoletju), Grki pa so igre na srečo igrali z astralagusom. Namesto kocke so uporabljali manjšo kost iz ovčje pete, ki je bila na štirih straneh ravna, na dveh pa zaobljena. Stranice o označevali s števili (1, 6, 3 in 4), najboljši rezultat pa je bil, če si v štirih metih dobil štiri različne rezultate. Poleg tega različni astralagusi med seboj niso bili povsem enaki, računanje verjetnosti, da pade določen rezultat pa je bilo tako zelo komplicirano.

Ne glede na to ali je razvoj moderne igralne kocke imel vpliv na razvoj verjetnostnega računa, ostaja dejstvo, da so se prvi poskusi matematične opredelitve verjetnosti začeli šele v pozni renesansi, seveda ob obravnavi kockanja (npr. Blaise Pascal okrog leta 1660). Verjetnost je imela takrat sicer povsem drugačen pomen: opredeljevala je, do katere stopnje so neka mnenja sprejemljiva, kot taka pa je bila del nižjih znanosti

¹ Intuitivno se zdi, da so verjetnostne ocene pomembne tudi za ostale živali. Za primer študije, ki gibanje živali razloži z njihovimi verjetnostnimi ocenami, glej Pérez-Escudero in de Polavieja (2011).

(alkemije, medicine). Višje znanosti (npr. astronomija, mehanika) verjetnosti niso potrebovale, saj so se utemeljevale na (raz)vidnih dokazih (Hacking, 1984, 39-49).

Na kratko pogledimo nekaj ključnih mejnikov na poti razvoja verjetnostnega računa, ki so pomembno vplivali na razvoj različnih še vedno aktualnih interpretacij verjetnosti.

4 Blaise Pascal in Pierre de Fermat

Blaise Pascal se je v zgodovino filozofije odmevno zapisal (tudi) s svojo posthumno izdano zamislijo o stavi glede obstoja Boga (Pascal, [1669] 1986). Ideja je preprosta: če Bog obstaja, je razumno, da vanj verjamemo, saj nam to omogoča neskončno posmrtno korist (oz. neskončno trpljenje, če vanj ne verjamemo). V primeru, da Bog ne obstaja in vanj vseeno verjamemo, je naša izguba končna (manj ugodja, ...), če pa vanj ne verjamemo pa je korist končna (več ugodja). Oba dogodka (da Bog obstaja oz. ne) sta zanj enakovredna. V prvem dogodku sta možna izida neskončna korist in neskončno trpljenje. V drugem dogodku pa končno trpljenje in končna korist. Če verjamemo v obstoj Boga, sta tako možna izida le neskončna korist in končno trpljenje, sicer pa neskončno trpljenje in končno ugodje. Ker neskončnost prevlada nad končnostjo, je zato najbolj razumno, da verjamemo v obstoj Boga.

Zanimivo je, da je Pascalova filozofska ideja povezana s stavami in se jo da dobro orisati prav z verjetnostnim besednjakom (dogodki in izidi). Tudi njegov glavni doprinos k verjetnostnemu računu je namreč prav tako povezan s stavami, razvil pa ga je v korespondenci z matematikom Pierrom de Fermatom. Posvetila sta se problemu, kako razdeliti denar, če dva kockarja prekineta igro pred koncem. K razpravi sta pristopila z druge smeri kot njuni predhodniki. Ugotovila sta, da ni ključno, kakšno je bilo razmerje predhodnih iger, temveč zamišljanje možnih nadaljevanj igre, na podlagi katerega lahko izračunamo stopnjo pričakovanja (verjetnosti), da zmaga oseba A oz. B.

5 Pierre-Simon Laplace

V nadaljnjih dveh stoletjih po Pascalovi in Fermatovi verjetnostni obravnavi iger na srečo se je verjetnostni račun pomembno izpopolnil (pomembni so bili npr. Huygens, Bernoulli, Leibniz, Hume). Proti koncu 18. stoletja je Thomas Bayes razvil tudi še danes odmeven Bayesov teorem, ki se mu bomo posvetili spodaj, šele Pierre-

Simon Laplace pa ga je približno dvajset let po njegovi smrti dokončno uveljavil. Laplace je v filozofiji znan po miselnem eksperimentu o vsevednem demonu (t.i. Laplacov demon²), ki nastopa prav v razpravi o verjetnostih. Ker nas na tem mestu vprašanje determinizma ne zanima (čeprav je vprašanje v globoki povezavi z naravo verjetnosti kot take), se raje posvetimo Laplacovemu doprinosu k razvoju verjetnostnega računa. Laplace je zanimiva figura, saj je v svojem delu izpopolnil ideje Thomasa Bayesa, hkrati pa zakoličil klasično interpretacijo verjetnosti, v kateri lahko zaznamo odmev Pascalovih, Huygensovih, Bernoullijevih, Leibnizovih in celo Bayesovih idej. Laplace se namreč izrazi na sledeč način:

Teorija slučaja sestoji iz omejevanja dogodkov iste vrste na določeno število enakovrednih izidov, ki so taki, da lahko o njihovem obstoju enakomerno dvomimo, in v določanju števila izidov, ki potrjujejo dogodek, katerega verjetnost skušamo potrditi. Razmerje tega števila in števila vseh možnih izidov je mera verjetnosti, ki je tako samo ulomek, čigar števec je število ugodnih izidov, imenovalec pa število vseh možnih izidov. (Laplace, [1814] 1952, 6-7)

Zaenkrat samo izpostavimo, kako se v zgornjem navedku vidi vpliv predhodnih teorij. Pomembna je omemba enakovrednosti izidov, saj je prav enakovrednost ključnega pomena za računsko določanje verjetnosti v klasičnih pristopih. Izidi morajo biti enakovredni, drugače jih ne moremo vključiti v račun, kar velja že od Pascalovega časa dalje. Druga stvar, na katero velja opozoriti v tem kratkem pregledu zgodovine verjetnostnega računa, je omemba dvoma oz. prepričanja, saj se na tem primeru vidi tudi povezava z Bayesovo interpretacijo, ki v ospredje določanja verjetnosti postavlja stopnjo prepričanja. Laplace sicer ni subjektivist, vidi pa se, da je pojem stopnje prepričanja za njegovo razumevanje verjetnosti še vedno igral pomembno vlogo.

Thomas Bayes

Kdo je torej Thomas Bayes, po katerem se imenuje pomembna šola verjetnosti, in kakšen je njegov doprinos k razumevanju verjetnosti? Gre za anglešega duhovnika, je bil dejaven v 18. stoletju, o njegovem življenju pa ni veliko znanega. Objavil je vsaj dve knjigi, eno o teoloških vprašanjih (Bayes, 1731), drugo pa v obrambo Newtonovi mehaniki (Bayes, 1736), obe pod psevdonimom John Noon. Nobeno izmed teh del

² Laplace ([1814] 1952) sicer nikjer v svoji razpravi ni eksplicitno omenil demona.

sicer ni imelo zgodovinsko pomembnega vpliva, se pa je Bayes v zgodovino vpisal s svojim doprinosom k razumevanju verjetnosti. Z verjetnostjo se je začel ukvarjati šele proti koncu svojega življenja, njegov najslavnejši prispevek (Bayes, 1763) pa je bil objavljen posmrtno. Skoraj samoumevno se nam zdi, da je v tem spisu Bayes razvil eno izmed ključnih orodij subjektivne interpretacije, t.i. Bayesov teorem, o katerem več kasneje. Pa je temu res tako? Pogled v njegov spis namreč kaže nekoliko drugačno sliko. Thomas Bayes v svojem delu teorema namreč ni predstavil niti v diskretni obliki $P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B)$, niti v integralni obliki, čeprav je rešil poseben primer slednjega (Fienberg, 2006, 3). Prvo obliko Bayesovega teorema, kot ga poznamo danes, je tako razvil šele Pierre-Simon Laplace, zato se poraja vprašanje kako bayesovski je Thomas Bayes sploh bil? Bi Thomasa Bayesa danes sploh uvrstili med Bayesovce?

Na to vprašanje sicer ni enoznačnega odgovora, zagotovo pa so posledice Bayesove prvotne analize bistveno bolj omejene od današnjih. Njegov pristop je sicer subjektiven, saj temelji na stopnjah prepričanj, vendar pa so njegovi rezultati odvisni od opazljivih posledic. S tem je Bayes v temeljnem neskladju s principom obratne verjetnosti (določanje verjetnosti še neopaženim spremenljivkam) (Fienberg, 2006, 4), ki je najbolj značilna prav za subjektivne interpretacije verjetnosti. Thomas Bayes je torej bayesovskemu gibanju dal predvsem ime, ključen za uveljavitev pa je bil predvsem Pierre-Simon Laplace. Laplace je sicer osrednja figura tudi v klasični interpretaciji verjetnosti. Prav iz njegove »dvojne« vloge lahko že slutimo, da je bila razcepljenost interpretacij verjetnosti na zgodnejših stopnjah razvoja manj izrazita. Do pravih razhajanj je tako prišlo predvsem z razvojem teorij verjetnosti ob vedno širši uporabi verjetnostnega računa.

6 Andrej Nikolajevič Kolmogorov

Na tem mestu izpustimo nekaj pomembnih imen v razvoju verjetnostnega računa v 19. in 20. stoletju in preskočimo k ruskemu matematiku Andreju Nikolajeviču Kolmogorovemu. Prav njegovo delo namreč predstavlja skupno izhodišče za veliko večino modernih razprav o verjetnosti, ne glede na to kateri interpretaciji verjetnosti sledijo. Kolmogorov (1933) je razvil aksiome verjetnostnega računa, ki so še vedno v veljavi. Njegove Temelje verjetnostnega računa [Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung] zato uvrščajo med matematične klasike. Poglejmo torej, kateri so osnovni aksiomi verjetnostnega računa, kot jih je uveljavil

Kolmogorov. Prav ti aksiomi so namreč predpostavljeni v tako rekoč vsaki moderni razpravi o verjetnosti. Aksiomi so samo trije, in sicer sledeči:

Imamo množico vseh dogodkov Ω , glede na katero definiramo σ -algebro S . Verjetnostna funkcija je potem funkcija P z definicijskim območjem S , ki zadošča naslednjim aksiomom:

1. Verjetnost dogodka A je nenegativno število:

$$P(A) \in \mathbb{R}, P(A) \geq 0 \quad \forall A \in S \text{ (prvi aksiom).}$$
2. Verjetnost množice vseh dogodkov Ω je 1:

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{(drugi aksiom).}$$
3. Če so dogodki $A_1, A_2, \dots$ paroma nezdružljivi, potem je verjetnost unije dogodkov enaka vsoti verjetnosti posamičnih dogodkov:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad \text{(tretji aksiom).}$$

Iz teh treh aksiomov sledijo nekatere pomembne posledice. Poglejmo nekaj ključnih:

Če je dogodek A del dogodka B , je verjetnost dogodka A manjša oz. kvečjemu enaka verjetnosti dogodka B : $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (monotonost).

Ta posledica se nam zdi samoumevna. Zamislimo si met običajne igralne kocke. Verjetnost, da pade liho število, je večja kot verjetnost, da pade število 3, ker je dogodek, v katerem pade število 3 podmnožica dogodka, v katerem pade liho število. Privoščimo si krajšo digresijo, iz katere bo razvidno, da ta posledica v vsakdanjem mišljenju ni vedno tako zelo samoumevna. Na to sta opozorila Kahnemann in Tversky z eksperimentom, pri katerem sta udeležencem predstavila naslednjo situacijo:

Linda ima 31 let, je samska, poštena in zelo bistra. Diplomirala je iz filozofije. Kot študentka se je globoko zanimala za vprašanja diskriminacije in družbene nepravilnosti, sodelovala pa je tudi v proti-jedrskih demonstracijah. (Kahneman in Tversky, 1982, 92)

Udeleženci so nato izmed nekaj ponujenih možnosti morali izbrati (oz. rangirati možnosti) najverjetnejši poklic, ki ga opravlja Linda. Prava naloga je bila sicer skrita, saj je bilo ključno vprašanje, katera izmed sledečih možnosti je bolj verjetna:

1. Linda je bančna blagajničarka.
2. Linda je bančna blagajničarka in aktivna v feminističnem gibanju.

Po pričakovanju se je večina udeležencev odločila za drugo, bolj intuitivno možnost, ki pa je napačna ravno zaradi zgoraj omenjene posledice. Verjetnostni dogodek, v katerem je Linda blagajničarka in aktivna v feminističnem gibanju, je le manjši del dogodka z množico izidov (primerov), v katerih je Linda bančna blagajničarka. Posledično je verjetnost prve možnosti višja.

Vrnimo se k posledicam aksiomov Kolmogorova. Verjetnost prazne množice dogodkov je 0:

$$P(\emptyset) = 0 \quad (\text{verjetnost prazne množice})$$

Verjetnost dogodka je realno število na intervalu $[0, 1]$ (kar sledi iz monotonosti):

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (\text{številčna omejenost})$$

Ta posledica je pomemben razlog, zakaj v kvantni mehaniki posegajo po ne-kolmogorovskem verjetnostnem računu. Kvantna mehanika, ki je sicer kraljica med vsakdanjemu razumu tujimi znanostmi, npr. pozna tudi negativno verjetnost. Kaj točno naj bi negativna verjetnost bila, na tem mestu ni pomembno. Poglejmo si raje naslednje lastnosti, ki sledijo iz aksiomov Kolmogorova:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\text{pravilo seštevanja})$$

Pravilo seštevanja je pomembno, saj z njim lahko seštejemo, kakšna je verjetnost, da se bo zgodil dogodek A ali B. Če sta dogodka neodvisna, zadnji del $P(A \cap B)$ odpade, ker gre v tem primeru za prazno množico (neodvisna dogodka se ne zgodita hkrati), prazna množica pa ima ničelno verjetnost.

Zadnja pomembna posledica ima opravo z nasprotnim dogodkom:

$$P(\neg A) = 1 - P(A) \quad (\text{verjetnost nasprotnega dogodka})$$

Verjetnost nasprotnega dogodka (da se dogodek A ne zgodi) na podlagi zgornjih aksiomov in te izpeljane lastnosti tako z lahkoto izračunamo: če je verjetnost dogodka A, denimo 70%, je verjetnost, da se A ne bo zgodil 30% (100% - 70%).

Ker aksiomi Kolmogorova še vedno tvorijo trdo jedro verjetnostnega računa, s tem tudi zaključujem kratek pregled nekaterih ključnih mejnikov na zgodovinski poti njegove uveljavitve. Vprašanje o razumevanju verjetnosti se s tem seveda ni končalo, temveč se je šele dobro začelo. Formalno-matematično imamo v zgornjih aksiomih trden temelj, ki pa vseeno omogoča kar nekaj konkurenčnih interpretacij verjetnosti.

7 Različne interpretacije verjetnosti

Kratek pregled zgodovine verjetnostnega računa nam je omogočil, da se lahko končno posvetimo glavni temi pričujočega prispevka: različnim interpretacijam verjetnosti. Kaj sploh pomeni, da imamo opravka z neko določeno interpretacijo verjetnosti? Interpretacija pomeni način, kako si razlagamo, kaj naj bi verjetnost bila. Natančneje rečeno: ko interpretiramo, osnovnim terminom v aksiomih in teoremih formalnega sistema pripisujemo znane pomeni. Verjetnost pa ni posamezen formalni sistem, temveč »kvečjemu zbir takih sistemov« (Hájek, 2012). Boljša oznaka za različne interpretacije, bi bila analiza različnih konceptov verjetnosti. Če skušamo nenatančna pojmovanja verjetnosti, ki jih poznamo v vsakdanjem življenju, prirediti v primerne za filozofsko in znanstveno teorijo, pa bi bilo morda še bolje govoriti o eksplikaciji v Carnapovem smislu (ibid.). V skladu s splošno razširjenostjo pojma interpretacija, bom ta pojem kljub njegovi nekoliko zavajajoči naravi tako kot poprej uporabljal tudi v nadaljevanju.

8 Razkol na etimološki ravni

Morda se na tem mestu komu še vedno zdi, da je razprava o različnih interpretacijah verjetnosti nepotrebna, saj naj bi imeli različni ljudje ob vsaki omembi verjetnosti v mislih nekaj podobnega. Taki trditvi se moramo zoperstaviti, saj se zanimivo razhajanje v interpretacijah verjetnosti pokaže že na jezikovni ravni.

Vzemimo za primer kar slovenski jezik, kjer samostalnik verjetnost izhaja iz glagola verjeti. Takšna je vsaj najverjetnejša razlaga, saj imata obe besedi enak koren. Pri tem je zanimivo predvsem to, da je ključen predmet verjetja³ subjektivno prepričanje.

³ Etimološko »verjeti« dobesedno pomeni »vero vzeti«, vzeti za resnično. Podobno je tvorjena nemška beseda »Wahr-nehmen«, katere pomen je sicer povsem drugačen, in sicer zaznava.

Slovenski izraz »verjetnost« nas torej napeljuje k subjektivni (Bayesovi) interpretaciji verjetnosti. Je pa to le slovenska plat zgodbe. Če skočimo v jezike, ki se pri besedi »verjetnost« etimološko opirajo na latinščino, naletimo (vsaj na prvi pogled) na povsem drugačno razumevanje. Angleščina, denimo, uporablja besedo *probability*, ki izvira iz latinskega glagola *probare* – testirati, preizkusiti oz. kot se včasih izrazimo v pogovornem jeziku: probati. Etimologija angleške *probability* tako opisuje povsem drugačno interpretacijo verjetnosti, kot je naša. Zdi se, kot da bi angleški pojem opisoval nekaj podobnega frekventistični interpretaciji. *Probabiliteta* (etimološko) tako opredeljuje, kako pogosto se naj bi nek dogodek pojavljal v mnogih ponovljenih poskusih.

Problem sicer ni tako enostaven, kot se morda zdi iz tega hitrega vzporejanja različnega izvora pojma verjetnosti v slovenščini in latinščini. Podrobnejši pregled etimološkega izvora (in dejanske rabe) nas namreč napelje k pogojnemu latinskemu glagolu *probus*, ki izvira iz protoindoevropskih *pro* (»spredaj, v ospredju«) in *-bew*, *-buh* (»biti«). Označuje torej nekaj kar je spredaj, boljše od ostalega. Taka je bila tudi raba do sredine 17. stoletja, ko je latinski pridevnik *probabilis* označeval mnenje oz. dejanje, ki je hvalevredno (Jeffrey, 1992, 55). Pojem verjetnosti je bil torej dejansko bližje subjektivni interpretaciji verjetnosti, saj je opredeljeval stopnjo prepričanja (*kredence*), kar se lepo odseva tudi v slovenskem izrazu *verjet-nosti*. Ne glede na to, katera razlaga je pravilna, nas lahko razlika med verjetnostjo in *probabiliteto* opomni na (vsaj) dve različni interpretaciji: verjetnost kot stopnja prepričanja in *probabiliteta* kot razmerje med ugodnimi in neugodnimi izidi poskusa.

9 Klasična interpretacija

Klasična interpretacija verjetnosti svoje ime dolguje svoji starosti. Kot sem omenil zgoraj, jo je utemeljil Pierre-Simon Laplace v zgodnjem 19. stoletju, njeni prvi zagovorniki pa so še starejši (npr. Pascal in Fermat). Kljub temu se ta interpretacija ne imenuje klasična zgolj zaradi starosti, temveč tudi zaradi hitre sprejemljivosti. Ta interpretacija namreč dobro zajame vsakdanje kvazi-logično razumevanje verjetnosti. Poglejmo primer: kakšna je verjetnost, da bo ob metu kovanca pristala cifra? Verjetnost je polovična. Zakaj? Možna sta dva izida, en izmed njiju je cifra; verjetnost je torej 1 proti 2 oz. $\frac{1}{2}$. Prav to je značilnost klasične interpretacije: za določanje verjetnosti nekega dogodka ne potrebujemo gore podatkov. Zadošča, da premislimo, kakšni so možni izidi in jih primerjamo s številom za obravnavan dogodek ugodnih izidov. Verjetnost se med vse možne izide nekega dogodka

enakomerno porazdeli, tako da je določanje razmerja med ugodnimi izidi in vsemi izidi zelo enostavno. Tak izračun je povsem smiseln za klasične igre na srečo, kot je zgoraj omenjen met kovanca (če izključimo možnost, da kovanec pristane na rob). To sicer ne čudi preveč, saj se je verjetnostni račun najprej razvijal ob klasičnih igrah na srečo, kamor zagotovo spadajo tudi igre z igralno kocko.

Seveda pa ima klasična interpretacija kar nekaj pomanjkljivosti. Spomnimo na že omenjeno Laplacovo opredelitev: »Teorija slučaja sestoji iz omejevanja dogodkov iste vrste na določeno število enakovrednih izidov, ki so taki, da lahko o njihovem obstoju enakomerno dvomimo, in v določanju števila izidov, ki potrjujejo dogodek, katerega verjetnost skušamo potrditi.« (Laplace, [1814] 1952, 6) Pri tem so težava predvsem enakovredni izidi. Če imamo opravka z običajno šeststrano in neobteženo igralno kocko, ob kateri se je klasična interpretacija razvila, so načeloma vsi izidi (padec števila 1-6) res enakovredni. Kaj pa se zgodi z verjetnostjo ob metu goljufive kocke? Izidi v tem primeru niso enakovredni, s klasično interpretacijo pa jih težko izračunamo. Laplace je sicer predvidel tudi to možnost, vendar je pri tem avtomatično prestopil izven svoje opredelitve. Možnost omenja v sedmem poglavju Filozofskega eseja, ki ima naslov »O neznanih ne-enakostih, ki lahko obstajajo med možnostmi, ki naj bi bile enakovredne« ([1814] 1952, 56), kasneje v matematičnih raziskavah verjetnosti pa tako možnost pri goljufivem kovancu opredeli kot $1+\alpha$ za grb in $1-\alpha$ za cifro (gl. Todhunter 1865:470, 598; cit. po Gillies, 2000, 18), pri čemer je α lahko neznana. S tem je sicer v neskladju s trditvijo, da je verjetnost le epistemološka mera za človeško nevednost, kaj se bo zgodilo v prihodnje.

Klasična interpretacija je zaradi te (in drugih) pomanjkljivosti počasi zamrla, čeprav še vedno (običajno implicitno) nastopa v mnogih matematičnih ugankah (Hájek, 2012, 3.1). Zanimivo je, da je tej interpretaciji sledil tudi matematik Markov leta 1912, ko je razvil strukturo markovskih verig, ki imajo še danes pomembno mesto v verjetnostnem računu.

10 Logična interpretacija

Prav to pomanjkljivost naj bi odpravila logična interpretacija, ki predstavlja smiselno nadaljevanje in poglobitev klasične interpretacije. Verjetnost lahko določimo a priori s preučevanjem vzorčnega prostora, dodani pa sta dve pomembni posplošitvi:

1. možnosti so lahko *neenakovredno* obtežene,

2. verjetnost lahko izračunamo ne glede na simetrično (ne)uravnoteženost podatkov.

Logična interpretacija je ime dobila po svojem pristopu: podobno kot klasična interpretacija v naprej predvidi možne izide, ki pa jih ne obravnava kot enakovredne, temveč verjetnost določi kot logično razmerje med njimi. S tem posplošuje deduktivno logiko in deduktivno implikacijo, saj uvede stopnjo implikacije. V deduktivni logiki sklep sledi ali pa ne, v induktivni logiki (kombinirani z logično interpretacijo verjetnosti) pa sledi z višjo ali nižjo stopnjo. Prav zaradi tega logično interpretacijo pogosto zamenjujejo s teorijo induktivne logike, kar pa ni povsem upravičeno. Logična interpretacija dejansko ustreza tudi »običajni« deduktivni logiki, ki v tem sistemu predstavlja mejne primere, ko je verjetnost propozicij enaka stopnji 1 oz. 0.

Znani zagovorniki logične interpretacije so npr. Keynes (1921), oče keynesijanske ekonomske teorije, zgodnji Popper (kasnejši zagovornik propenzitete), predvsem pa Carnap (1950). Carnap je k logični interpretaciji pristopil zelo sistematično v svojem (do bralca zahtevnem) delu Logične osnove verjetnosti. Prav Carnap nam bo služil kot izhodišče v razpravi o prednostih in slabostih te interpretacije. Kako torej Carnap pristopi k verjetnosti?

Svoje razumevanje verjetnosti razvije na preprostem formalnem jeziku, v katerem imamo samo eno lastnost F in tri propozicije a , b in c . Pri tem razlikuje med opisi stanj in opisi struktur. Opis stanja nam za vsako propozicijo pove, ali je resnična ali ne, opis strukture pa je bolj formalen opis logičnih razmerij. Na primeru zgornjega jezika imamo tako samo 4 opise struktur:

1. Vse je F .
2. En F , dva $\neg F$.
3. Dva F , en $\neg F$.
4. Vse je $\neg F$.

Opisov stanj pa je več:

Opis stanja	Opis strukture	Teža strukture	Verjetnost stanja
$Fa \wedge Fb \wedge Fc$	Vse je F .	$1/4$	$1/4$
$Fa \wedge \neg Fb \wedge \neg Fc$	En F , dva $\neg F$.	$1/4$	$1/12$

Opis stanja	Opis strukture	Teža strukture	Verjetnost stanja
$\neg Fa \wedge Fb \wedge \neg Fc$			1/12
$\neg Fa \wedge \neg Fb \wedge Fc$			1/12
$Fa \wedge Fb \wedge \neg Fc$	Dva F, en $\neg F$.	1/4	1/12
$Fa \wedge \neg Fb \wedge Fc$			1/12
$\neg Fa \wedge \neg Fb \wedge Fc$			1/12
$\neg Fa \wedge \neg Fb \wedge \neg Fc$	Vse je $\neg F$.	1/4	1/4

Iz tega primera je razvidnih več stvari. Teža logične strukture (ki je enakomerno porazdeljena) vpliva tudi na verjetnost stanja. Homogeni stanji ($Fa \wedge Fb \wedge Fc$ in $\neg Fa \wedge \neg Fb \wedge \neg Fc$) imata bistveno večjo verjetnost kot ostala stanja, saj sta edina primerka svoje strukture, za Carnapa pa je logična struktura ključna. To pa v končni fazi vpliva tudi na izračun verjetnosti dogodkov.

Pustimo tehnične podrobnosti ob strani in si pogledimo le, kje tičijo glavne nevarnosti Carnapove logične interpretacije. Služila naj bi kot formalno orodje za induktivno logiko, pomemben ugovor (Hájek, 2012, 3.2) pa je v tem, da induktivna logika ne more potekati neodvisno od pomena predikatov. Carnap, kot se vidi iz zgornjega primera, pristopa povsem sintaktično, pomen pa pušča na strani. Carnapovi nasledniki (ibid.) so sicer skušali razviti boljše in obsežnejše formalne jezike, s katerimi bi bolje zajeli dejansko argumentiranje, pri tem pa so bili bolj ali manj neuspešni. Logična interpretacija je tako formalno zanimiva, a kolikor pridobimo s formalno natančnostjo logične analize, toliko tudi izgubimo z oddaljevanjem od dejanskosti. Prav to pa naj nam služi kot popotnica v subjektivno interpretacijo verjetnosti, ki naj bi služila približevanju verjetnosti dejanskim posameznikom.

11 Subjektivna verjetnost

Subjektivno interpretacijo verjetnosti najbolje opredeljuje njeno izhodišče: Verjetnost so stopnje prepričanj. S tem se subjektivna interpretacija bistveno razlikuje od klasične, logične pa tudi ostalih interpretacij, ki se jim bom posvetili v nadaljevanju, saj stopnjo verjetnosti bistveno poveže s posameznikom. Zagovorniki te interpretacije, ki je glavni zagon dobila v dvajsetem stoletju, so znani tudi kot Bayesovci po Thomasu Bayesu (ki sem ga omenil zgoraj), čeprav poimenovanje ni povsem upravičeno, saj sta za to interpretacijo zgodovinsko odgovorna predvsem angleški filozof Frank Ramsey in italijanski statistik Bruno de Finetti, ki sta na

podlagi Bayesovih in Laplacovih zgodovinskih doprinosov do te interpretacije neodvisno prišla hkrati proti koncu dvajsetih let prejšnjega stoletja (za zgodovinski pregled njunega neodvisnega in hkratnega razvoja subjektivne interpretacije glej Gillies, 2000, 50-87).

Pri tej interpretaciji, ki seveda ni enotna glede podrobnosti, ima lahko vsak posameznik različne stopnje prepričanj o istih stvareh, ključno pa je, da vedno ostane koherenten, saj je le tako lahko racionalen. Predpostavimo, da dve osebi spremljata met kovanca, za katerega nista prepričani, ali je pošten. Nadalje predpostavimo, da lahko kovanec pristane zgolj na grb ali cifro (ne pa, npr. na rob). Preden se met kovanca začne, lahko oseba 1 grbu pripiše 50% verjetnost, zaradi koherentnosti pa mora natanko isto verjetnost pripisati tudi cifri. Oseba 2 lahko grbu pripiše 99% verjetnost, a le če cifri hkrati pripiše 1% verjetnost, saj je sicer verjetnostno nekoherentna. Z nekaj dodatnimi predpostavkami lahko dokažemo tudi, da bosta verjetnostno koherentni osebi ob racionalnem posodabljanju prepričanj v skladu z verjetnostnim računom ter ob enaki evidenci (dokazilih oz. podatkih) konvergirali k enakim verjetnostim za iste dogodke. Ravno zato mora tudi slediti aksiomom verjetnostnega računa, kot jih je razvil Kolmogorov (1933), čeprav psihološke raziskave (npr. Kahneman in Tversky, 1982) kažejo, da ljudje tem pravilom ne sledimo.⁴

Poleg tega za subjektivno interpretacijo veliko vlogo igrajo tudi pogojne verjetnosti (verjetnost, da se zgodi nek dogodek A ob uresničenem dogodku B), saj naj bi preko njih spreminjali svoj sistem prepričanj. Prav v povezavi s pogojno verjetnostjo sta pomembna tudi koncepta predhodne in naknadne verjetnosti. Predhodno sem npr. s stopnjo 0, 5 prepričan, da bo kovanec padel na grb. Hkrati sem s stopnjo 0, 8 pogojno prepričan, da bo v primeru goljufivega kovanca padel grb. Ko enkrat ugotovim, da je kovanec goljufiv, se moja predhodna verjetnost, da pade grb, spremeni in dvigne na naknadno stopnjo 0,8.

Poraja se še vprašanje, kako sploh lahko določimo kolikšna je naša stopnja verjetnosti. Ramsey (1926 [1931]), kot zgodnji zagovornik te interpretacije, je predvidel več možnosti. Prva, nekoliko znanstvenofantastična, je, da imeli nekakšen »psihogalvanometer oz. nek tak instrument« (161), s katerim bi določili dejansko

⁴ Omeniti velja vplivno strujo bayesovske psihologije mišljenja in bayesovske kognitivne znanosti, ki s številnimi študijami argumentira, da smo ljudje odlični intuitivni bayesovski misleci (glej npr. Oaksford in Chater, 2007).

stopnjo prepričanja pri posamezniku. Druga možnost je, da stopnjo prepričanj določimo z introspekcijo, kar pa povzroči težavo, saj introspekcija ni pretirano zanesljiva. Ramsey zato to možnost zavrne in predlaga princip stav. Posameznikova stopnja prepričanja o neki stvari je natanko taka, kolikor bi bil pripravljen staviti nanjo:

Vse naše življenje je v nekem smislu stava. Ko gremo na postajo, stavimo, da vlak res pelje. Če naša stopnja prepričanja, da se bo to zgodilo, ne bi bila zadostno visoka, bi stavo raje opustili in ostali doma. (Ramsey, 1926 [1931], 183)

Poglejmo tri glavne »stebre« (principe) subjektivne interpretacije verjetnosti:

1. argument varljivih stav,
2. glavni princip in
3. Bayesovo pogojevanje (Hartmann in Sprenger, 2010, 614).

Vsi trije stebri skupaj omogočijo natančno analizo racionalnih prepričanj in racionalnosti po principu koherentnosti, ki jo zagotavljajo aksiomi verjetnostnega računa.

Argument varljivih stav (619), bolj znan pod imenom »Dutch book«, govori o tem, da je v vsakem primeru racionalno, da sprejmemo verjetnostne aksiome. V nasprotnem primeru lahko zapademo v sistem varljivih stav, ki nujno vodijo v izgubo, ne glede na razplet stave. Poglejmo samo primer, kaj se zgodi, če skupna verjetnost nasprotnih propozicij presega vsoto 1 oz. 100%. Pri tekmi tenisa s samo enim zmagovalcem bi tako lahko v nasprotju z aksiomi lahko verjeli, da je možnost zmage osebe A 50%, možnost zmage osebe B pa 70%. Zato bi bili pripravljeni vplačati za stavo, ki prinaša 10€ dobička, natanko 5€ v primeru zmage osebe A in 7€ za osebo B. Torej bi skupno vplačali 12€, ne glede na izid pa dobili zgolj 10€ (2€ izgube).

Upoštevanje aksiomov je na take sisteme stav odporno (za dokaze glej npr. Kemeny 1955, Skyrms 1980), zato je racionalno, da jih sprejmemo. Argument varljivih stav s tem »vzpostavlja logiko delnih prepričanj« (Hartmann in Sprenger, 2010, 613).

Argument sicer govori zgolj o sistemih prepričanj, ne pa tudi o racionalnosti posameznih prepričanj. Tu nastopi Lewis (1980), ki je postavil drugi steber bayesovske epistemologije, t.i. glavni princip. Če epistemološki agent pozna objektivno verjetnost p neke propozicije A in nima nobene močnejše informacije, potem mora biti stopnja njegovega racionalnega prepričanja natanko p . Lewis s tem sicer spada med objektivne Bayesovce, o čemer več spodaj. Določeni (subjektivni) Bayesovci se z glavnim principom namreč ne strinjajo.

Glavni princip in argument varljivih stav skupaj gradita močan okvir racionalnosti delnih prepričanj v statičnem smislu – prepričanja, ki jih ima nek racionalni akter v nekem specifičnem trenutku (Hartmann in Sprenger, 2010, 614).

Tretji steber predstavlja Bayesovo pogojevanje, ki v imenu nakazuje pogojno verjetnost. Bayesovo pogojevanje opiše dinamiko racionalnih prepričanj (H), ki se ob stiku z novimi informacijami (E) spremenijo na podlagi pogojne verjetnosti: $P_{\text{nova}}(H) = P_{\text{stara}}(H | E)$. Če trenutno verjamem, da je verjetnost mokre ceste, H , v primeru dežja, E , enaka 0,95, tj. $P_{\text{stara}}(H | E) = 0,95$, ter nato opazim, da dežuje (E), Bayesovo pogojevanje pomeni, da moram posodobiti svoje prepričanje glede mokre ceste na 0,95, ne glede na moje prejšnje prepričanje o tem, kako mokra je cesta.⁵

Vsi ti trije principi so ključni za razumevanje zagovornikov in nasprotnikov bayesovske subjektivne interpretacije verjetnosti. Pred pregledom možnih očitkov in odzivov si pogledajmo še pomembno razhajanje znotraj samega bayesovskega tabora med subjektivnimi in objektivnimi Bayesovci.

12 Subjektivni in objektivni Bayesovci

Med zagovorniki bayesovske subjektivne interpretacije verjetnosti obstaja kar nekaj razhajanj. Najpogostejše je sporno določanje predhodnih verjetnosti. Če razumemo verjetnosti kot stopnje posameznikovih prepričanj (natančneje, prepričanj ob času t), potem se poraja vprašanje, kako pride to tega, da izoblikujemo neko prepričanje v ravno določeni stopnji. Vprašanje ni zanemarljivo, saj je prav predhodna verjetnost (predhodna stopnja prepričanja, ki jo imamo pred seznanitvijo z novimi

⁵ Izjema pri tem so ekstremne verjetnosti (tj. verjetnosti 0 in 1), ki sta v bayesovski epistemologiji dogmatični, tj. nespremenljivi, zato ju večina avtorjev dovoljuje zgolj za logična protislovja oz. tautologije.

informacijami) en izmed ključnih konceptov subjektivne interpretacije verjetnosti. Na tem mestu pa se tabor Bayesovcev razdeli v dve skupini:

- prvo skupino sestavljajo subjektivni Bayesovci,
- v drugi pa so objektivni Bayesovci.

Glavna razlika med obema skupinama je v odgovoru na vprašanje, kako racionalno določiti predhodno verjetnost še neopaženemu izidu. Skrajni subjektivni Bayesovci trdijo, da je edino pravilo, da sledimo koherentnosti in upoštevamo verjetnostna pravila, skrajni objektivni Bayesovci pa pri tej dilemi popolnoma sovpadajo z logično interpretacijo in predhodno verjetnost v celoti določijo a priori glede na simetrije možnih izidov. Razliko lahko jasneje vidimo na primeru. Denimo, da iz vreče slepo izbiramo frnikole. Edina informacija, ki jo imamo, je, da so v vreči vse frnikole rdeče, vse črne ali pa mešane črne in rdeče; drugih barv frnikol v vreči ni. Kakšna je torej predhodna verjetnost, da so v vreči vse frnikole rdeče?

Subjektivni Bayesovci bi trdili, da je verjetnost lahko kjerkoli na intervalu $[0, 1]$ (Jeffrey bi sicer odpisal skrajni stopnji 0 in 1, cit. po Hájek). Pomembno je le, da se ohrani aksiome verjetnostnega računa in koherentnost. Denimo, da je moja subjektivna verjetnost, da so vse frnikole rdeče natanko 0, 2 (ostali dve možnosti pa morata po drugem aksiomu skupaj znašati natanko 0,8). Predhodno verjetnost lahko določim skoraj povsem poljubno, na določitev pa vplivajo npr. osebni razvoj, svobodna izbira in socializacija.

Na drugi strani se objektivni Bayesovci s tem ne bi strinjali, saj je osebno določanje predhodne verjetnosti lahko povsem arbitrarno in posledično neracionalno. Zato sprejemajo stališče, da moramo pri predhodni verjetnosti slediti logični simetriji, če nimamo močnejših informacij proti takemu določanju. V primeru frnikol je racionalno postavljena predhodna verjetnost, da so vse frnikole rdeče, lahko zgolj $1/3$ (enako velja za ostali možnosti). Taka je simetrija možnosti (treh), nimamo pa tudi nobenega močnejšega razloga, da bi predhodno verjetnost določili drugače. Kljub temu do popolnega stapljanja z logično interpretacijo ne pride, saj objektivni Bayesovci ohranijo interpretacijo verjetnosti kot stopnje prepričanj in ostala formalna orodja subjektivne interpretacije, npr. Bayesov teorem in pogojevanje.

Čeprav se nam zdi stališče objektivnih Bayesovcev na prvi pogled bolj sprejemljivo kot subjektivno pa je njihovo razumevanje tudi povod za različne paradokse. To je nekako razumljivo, saj skušajo združiti dve različni interpretaciji verjetnosti: subjektivno in objektivno (logično), ki imata obe zelo različen izvor. Nekateri (npr. Hájek) so celo mnenja, da pri objektivnih in subjektivnih interpretacijah verjetnosti ne govorimo o isti stvari, le poimenovanje (verjetnost) je zavajajoče enako.

13 Kritike subjektivne interpretacije

Subjektivna interpretacija verjetnosti je vsaj v okviru formalne epistemologije sicer ena izmed trenutno še vedno najpopularnejših interpretacij, saj omogoča to, česar druge ne: operiranje s posameznikovimi prepričanji. Vendarle pa je že med samimi pristaši (sploh pa nasprotniki) te interpretacije je znanih kar nekaj dilem. Poglejmo samo nekaj primerov:

1. težave s pogojno verjetnostjo,
2. distribucija verjetnosti ob popolni ignoranci,
3. popolna racionalnost akterjev,
4. težave ob uporabi za analizo hipotez in podatkov.

O pogojni verjetnosti je bilo prelitega kar nekaj črnila (med slavnejšimi je npr. Lewis, 1976). Pogojna verjetnost $P(A|B)$ predstavlja številčno verjetnost, da se zgodi nek dogodek (A) ob pogoju, da je nek drug dogodek (B) uresničen. Osnovna težava je v tem, da je sam matematični koncept že povod za težave. Kolmogorov, utemeljitelj sodobnega verjetnostnega računa, je pogojno verjetnost opredelil na sledeč način: $P(A|B) = P(A \wedge B)/P(B)$; $P(B) > 0$.

Verjetnost pogoja (B) mora nujno biti pozitivna. Kaj pa se zgodi v primeru, ko velja $P(B) = 0$? Hájek (2003, 285) opozarja, da ti primeri niso zanemarljivi ali nemogoči, predstavljajo pa hud izziv taki opredelitvi pogojne verjetnosti. Vzemimo za primer mokre ceste in dež. Kakšna je verjetnost, da bo cesta mokra, v kolikor nekega dne popoldne dežuje? Predpostavimo, da je ta verjetnost enaka x , $P(M|D) = x$, kjer je x lahko npr. 0,95. Podobno se lahko vprašamo, kakšna je verjetnost mokre ceste, če dežuje med tretjo in četrto uro popoldne, in domnevamo, da se pogojna verjetnost ne spremeni (pretirano). Če pa se vprašamo, kakšna je verjetnost, da je cesta mokra, v kolikor dežuje ob nekem specifičnem trenutku, pridemo v težave. Verjetnost dežja

ob nekem specifičnem trenutku namreč gre proti 0, vseeno pa imamo intuitivno občutek, da tudi v primeru takega dogodka z ničelno verjetnostjo, pogojna verjetnost $P(M|D_t)$, kjer D_t predstavlja dež v nekem trenutku, vseeno ne odstopa (pretirano) od $P(M|D)$.

Hájekov (2003) predlog je, da se zato odpovemo Kolmogorovi opredelitvi, kjer pogojno verjetnost opredeljujejo nepogojne verjetnosti, in za prvotno vzamemo pogojno verjetnost. Rešitev predstavlja samo eno izmed možnosti soočanja s tem problemom (za kritiko Hájekove rešitve in pregled možnih rešitev, glej Easwaran, 2008).

Druga težava subjektivne interpretacije je povezana s prvo. Kaj se zgodi z distribucijo verjetnosti, če o nečem nimamo nikakršnega prepričanja? Standardna rešitev bi bila, da takemu prepričanju določimo stopnjo verjetnosti 0. S tem pa zaidemo v nevarno početje: razlika je namreč med prepričanjem v negacijo in neprepričanjem oz. s formalnim zapisom: $B(\neg A) \neq \neg B(A)$, kjer je B v funkciji prepričanja. Prepričanju ne, $B(\neg A)$, lahko določimo stopnjo verjetnosti 0, neprepričanju, $\neg B(A)$, pa ne. Tudi za to dilemo še ni dokončnega odgovora.

Težava subjektivne interpretacije je tudi v tem, da operira s popolnoma racionalnimi akterji. Komu naj bi tovrstna formalizacija potem sploh služila? Taki akterji namreč ne obstajajo, saj ljudje ob razmišljanju o verjetnosti delamo kar nekaj napak (kot sta pokazala npr. Kahneman in Tversky). Subjektivna interpretacija sicer omogoča rešitev mnogih statističnih težav, ki izven nje niso rešljive oz. dajo slabše rezultate, zato je tudi dosegla visoko število zagovornikov. Kljub temu pa te interpretacije ne moremo (vsaj ne neposredno) uporabiti za analizo vsakdanjega mišljenja (nekaj poskusov tovrstnih analiz npr. v zborniku Chater in Oaksford, 2008). Bayesovci sicer pogosto zagovarjajo, da je njihovo delo predvsem normativne narave, ostaja pa tudi to vprašanje še naprej odprto.

Zanimiva težava se pojavi tudi v filozofiji znanosti, kjer je subjektivna interpretacija verjetnosti pridobila veliko privržencev, saj omogoča dobro formalizacijo dinamike sprejemanja in zavračanja znanstvenih hipotez (H) ob novih podatkih (E). V najbolj enostavni verziji je potek sledeč: najprej določimo predhodno verjetnost hipoteze: $P_0(H)$ in verjetnost hipoteze ob nekih podatkih E : $P_0(H|E)$. Nato pridobimo podatke E in posodobimo verjetnost hipoteze: $P_1(H) = P_0(H|E)$. Pri določanju

$P_0(H|E)$ si lahko pomagamo z Bayesovim teoremom: $P_0(H|E) = P_0(E|H)/P_0(H)$, $P_0(E) > 0$. V kolikor je $P_1(H) > P_0(H)$, sledi, da so podatki E hipotezo potrdili, čeprav niso dokazali. Težava pri tem postopku pa je, da moramo hipotezam določati verjetnost, preden imamo zanje kakršnekoli podatke.

14 Frekventistična interpretacija

Frekventistična interpretacija predstavlja povsem drugačen (objektiven), po številu zagovornikov pa zelo pomemben pristop k razumevanju verjetnosti. V formalni epistemologiji ima sicer manj zagovornikov kot subjektivna interpretacija, saj je frekventizem za reševanje filozofskih dilem nekoliko manj uporaben (toliko bolj pa za statistično obdelavo podatkov). Zgodovinsko gledano se je sicer razvil v sredini 19. stoletja kot kritika britanskega empiricizma zoper interpretacijo verjetnosti kontinentalnega »racionalizma« (Laplace). Za razpravo o verjetnosti tako ni ključno razumsko a priori preučevanje možnosti. Ključni so empirični podatki. Zakaj torej gre?

Frekventistična interpretacija razume verjetnostni račun kot posebno matematično znanost, ki ima (podobno kot mehanika) za svoj predmet opazljive pojave (Gillies, 2000, 88). Osrednje mesto imajo torej opazljivi pojavi, kot nakazuje že ime predvsem pogostost (frekvenca) posameznega pojava. Interpretacija je povsem naravna za vse, ki pogosto igrajo igre na srečo: verjetnost, da ob metu običajne igralne kocke vržem šestico, je v tesni zvezi z relativno pogostostjo tega izida ob visokem številu metov (približno $1/6$). Frekventisti to naravno dožemanje tesne zveze med verjetnostjo in relativno pogostostjo enostavno nadomestijo z njuno enakostjo:

(*def-frek*) Verjetnost atributa A v končnem referenčnem razredu B je relativna pogostost dejanskega pojavljanja A znotraj B .

Sama opredelitev zaradi tehničnih izrazov morda izgubi nekaj jasnosti, vendar opiše samo bistvo (in nakaže glavno težavo frekventizma): verjetnost nekega dogodka je enaka razmerju med dejanskim pojavljanjem tega dogodka in vsemi dogodki (v nekem okviru). Iz opredelitve se sicer vidi sorodstvo s klasično in logično interpretacijo. Vse tri verjetnost opredeljujejo kot relativno razmerje med ugodnimi in vsemi izidi, pri čemer pa klasična in logična interpretacija v zakup vzameta vse možne izide, frekventizem pa samo dejanske (Hájek, 2012, 3.4).

Razliko pokažimo na primeru. Kakšna je verjetnost, da ob metu (poštene) igralne kocke pade število šest? Klasična in logična interpretacija bi brez težav odgovorili, da je verjetnost $1/6$; možnih izidov je 6, ugoden pa je samo eden. Frekventisti postopajo drugače. Kocko nekaj časa (recimo tisočkrat) vržejo, zabeležijo število šestic in ga delijo z vsemi meti. Večje kot je število metov, bližje naj bi bili številu $1/6$; če je število metov neskončno, pa verjetnost konvergira k $1/6$. Ta trditev je sicer iz frekventističnega stališča sporna, saj sem število $1/6$ določil brez dejanskih metov kocke. Možno je, da bi frekventist po tisoč metih prišel do verjetnosti 0,5, da pade število 6, čeprav tega ne pričakujemo. Vedno večje kot je število metov, bližje naj bi namreč bili številu $1/6$ – tako tudi znan zakon velikih števil, po katerem empirična verjetnost ob velikem številu poskusov konvergira k teoretični verjetnosti. Težava je tudi v tem, iz kje izhaja pričakovanje verjetnosti $1/6$; pri tem očitno sledimo klasični interpretaciji. Prav zaradi te težave so se določeni frekventisti poslužili neskončnega števila ponovitev poskusa, s čimer bi lahko prišli do zelenega rezultata. Za mnoge frekventiste je tak pristop sporen: ko govorimo o neskončnem številu ponovitev poskusa, se moramo štetju dejanskih pojavitev odpovedati, saj je pri neskončnem številu ponovitev to nemogoče. Zato se na tem mestu ločijo v dve skupini:

1. končni frekventizem,
2. neskončni frekventizem.

Obe skupini imata določene prednosti, predvsem pa kar nekaj nerazrešenih težav.

15 Končni frekventizem

Končni frekventizem predstavlja pomembno razumevanje verjetnosti v znanosti. Večina statističnega dela v znanosti namreč poteka (ob mnogih formalnostih statistike) prav preko iskanja relativne pogostosti primerov, ko je hipoteza uresničena. Nekoliko poenostavljeno rečeno; če je hipoteza dovolj pogosto potrjena glede na število vseh ponovitev, potem je z dovolj visoko verjetnostjo resnična. Čeprav je v znanosti (s pomočjo statistike) tak pristop povsem smiseln in omogoča dobro sklepanje, pa je na filozofski ravni kot interpretacija verjetnosti vprašljiv.

Težava končnega frekventizma je že v samem izhodišču, saj je interpretacija verjetnosti operativna (Hájek, 2012). Kaj se zgodi, ko povsem pošten kovanec vržem desetkrat in devetkrat pade grb? Ali to pomeni, da je verjetnost grba 0,9?

Frekventistična interpretacija nas sili v tak odgovor, saj verjetnost in dejansko pojavljanje tesno povezuje.

Podobno pride končni frekventizem do težave, ko ima opravka z določanjem verjetnosti pred samim poskusom (čemur frekventistična interpretacija v osnovi ni bila namenjena): kovanec verjetnosti, da pade grb, pred prvim metom sploh nima, kar je vsekakor nenavadno (ne moremo npr. trditi, da kovanec nima obsega, ker ga nismo izmerili). Hájek (2012, 3.5) opozarja, da je še večji problem v primerih, ko imamo samo eno ponovitev, saj potem nujno govorimo o verjetnosti 1 oz. 0. To pomeni, da imamo v neponovljivih dogodkih (kot so npr. volitve) zelo jasno stopnjo verjetnosti: neponovljiv dogodek je bodisi gotov ali pa povsem neverjeten. Frekventizem (ki ni nastal kot odgovor na filozofska vprašanja o naravi verjetnosti, temveč kot znanstveno orodje) omogoča samo ti dve možnosti, saj je v osnovi namenjen večjim referenčnim razredom (preprosto rečeno, za večje število ponovitev). Tudi večje število ponovitev verjetnostnega poskusa pa ni nujno razlog za uspeh frekventizma: pošten kovanec lahko tisočkrat vržemo in vedno pade grb. Tak izid je sicer redek, ni pa nemogoč, končni frekventist pa bi v tem primeru moral zopet sprejeti, da je verjetnost grba enaka 1. Kot možen odgovor na to zagato, se je že v 19. stoletju razvil neskončni frekventizem.

16 Neskončni frekventizem

Neskončni oz. hipotetični frekventizem ima že dolgo zgodovino. Osnovno izhodišče je, da bi lahko pravilno verjetnost (relativno frekvenco) določili šele po neskončnem številu ponovitev poskusa. Ker bi v primeru meta kovanca težko našli koga, ki bi bil pripravljen kovanec metati v nedogled (kar je že samo po sebi absurdno), se privrženci neskončnega frekventizma poslužujejo protidejstvenih miselnih poskusov (od tod tudi ime hipotetični frekventizem). To pa seveda sproža kar nekaj ugovorov.

Neskončni frekventisti začnejo na končnem primeru in ga nato hipotetično nadaljujejo. Ideja je sicer na prvi pogled razumljiva: kovanec vržemo tisočkrat, opazujemo, kolikokrat pade grb in (predvidoma) opazimo, da relativna pogostost konvergira k $1/2$. Če poskus nato hipotetično ponavljamo v neskončnost, naj bi prišli do verjetnost $1/2$. Pa je temu res tako? Če opazujemo relativno pogostost padcev grba, dobimo npr. naslednjo vrsto: $1/1$ (prvi met), $1/2$ (drugi met), $1/3$ (tretji met), $2/4$, $3/5$, $4/6$, $5/7$, $5/8$, ... Vrsta naj bi načeloma konvergirala k $1/2$, če pa jo

samo nekoliko preuredimo, lahko konvergira k poljubnemu številu na intervalu $[0, 1]$ (Hájek, 2012). Pomislimo le na relativno pogostost sodih števil v množici naravnih števil. Vrsto običajno uredimo naraščujoče: 1, 2, 3, 4, 5, ..., pri čemer relativna pogostost konvergira k $1/2$. Kaj pa če naravna števila uredimo tako, da so pred vsakim sodim številom vedno tri liha? Ker je množica naravnih števil $\mathbb{N}$ neskončna, je to mogoče, npr.: 1, 3, 5, 2, 7, 9, 11, 4, 13, 15, 17, 6, ..., pri čemer bi relativna pogostost sodih števil konvergirala k $1/4$. Podobno nam relativna pogostost niti v neskončnem frekventizmu ne poda nujno prave verjetnosti.

Neskončni frekventisti bi temu morda ugovarjali, da je potrebno upoštevati časovno zaporedje. A tudi to ni nujno rešitev: kovanec lahko mečemo v nedogled in v veliki večini metov pade grb, čeprav kovanec ni goljufiv. Pričakovanje, da se mora razmerje slej ko prej spremeniti, je tipičen primer kockarjeve zmote.⁶

Ugovor zoper neskončni frekventizem je sicer še več (kar nekaj jih je v Hájek, 2009), vendar naj v tem kratkem pregledu zadoščata ta dva. Nasprotno je končni frekventizem izredno priljubljen, saj predstavlja osnovo velikega dela statistike.

17 Propenziteta

Nekatere zagate frekventizma učinkovito reši interpretacija verjetnosti kot propenzitete (nagnjenosti). K verjetnosti tako kot frekventizem pristopa empirično, hkrati pa ne vzpostavlja identitete med relativno pogostostjo in verjetnostjo, temveč verjetnost razume kot fizikalno lastnost. S tem predstavlja najbolj objektivno interpretacijo verjetnosti (najbolj je osredotočena na objekt). Med znanimi zagovorniki in pionirji najdemo Karla Popperja, ki je tekom svojega filozofskega razvoja zagovarjal več različnih interpretacij od logične prek frekventistične do končne propenzitete, ki jo je tudi poimenoval. V propenziteto so ga iz frekventizma vodili predvsem enkratni dogodki, s katerimi ima frekventizem hude težave. V kvantni mehaniki pa so prav enkratni dogodki pogosti; kako lahko trdimo, da je verjetnost razpada radijevega atoma v 1600 letih $1/2$? Poskusa namreč ne moremo izvesti oz. ponavljati.

⁶ O kockarjevi zmoti govorimo, ko neodvisne dogodke razumemo kot odvisne. Kockar, denimo, po desetih zaporednih stavah na liho število izgubi, zato pričakuje, da mu mora v naslednjem poskusu uspeti. Ker pa so posamezni meti poštene kocke medsebojno neodvisni, je kockar v zmoti. Verjetnost, da v neskončnost padajo soda števila, je popolnoma enaka verjetnosti, da v neskončnost padajo liha števila oz. katerikoli drugi specifični razporedi rezultatov.

Preden dokončno prestopimo v propenzitetno interpretacijo velja opozoriti, da s to oznako označujem zelo raznolike (in pogosto neskladne) interpretacije. To je sicer značilno tudi za prej obravnavane interpretacije, vendar je pri propenziteti morda še bolj izrazito, saj nima kanonične oblike, po kateri bi se zgledovala vsaj večina avtorjev (Gillies, 2000, 113). Childers (2013, 34) npr. trdi, da je več različic propenzitetne interpretacije kot samih zagovornikov, s čimer želi izpostaviti, da vsak avtor zagovarja svojo interpretacijo, ki pa jo vmes še dograjuje in spreminja (to velja tudi za Popperja, ki ni le menjal različne interpretacije, temveč je razvil tudi vsaj dve različici propenzitetne interpretacije).

Kaj je torej tisto najožje jedro propenzitetnih interpretacij, ki jih loči od ostalih? Verjetnost določajo prek propenzitete (nagnjenosti), da se zgodi nek dogodek. Propenziteto pa razlagajo kot dispozicijo zmožnost, da se nekaj zgodi, če so uresničeni določeni pogoji. Padec grba pri metu kovanca ima tako verjetnost $1/2$, tudi če kovanca nikoli dejansko ne vržemo. Podobno za sol velja, da ima dispozicijo, da se stopi v vodi, čeprav ne bi nikoli prišla v stik z njo. Opozoriti moramo, da se propenziteto običajno ne določa predmetom samim, temveč poskusu. Na tak način upoštevamo vsa relevantna dejstva o predmetu in okolju, v katerem se poskus odvija.

Največja prednost propenzitete naj bi bila, da je učinkovita v enkratnih poskusih, npr. v primeru razpada radioaktivnega atoma. Večja težava je v tem, kako lahko znanstveno določimo propenziteto v takih primerih. Če vzamemo za primer razpad radioaktivnega atoma, lahko postopamo sorodno frekventistom, s to razliko, da poskusa ne ponavljamo z istim atomom (ker je to nemogoče), temveč ponavljamo enako zasnovan poskus in ugotovimo, kam limitirajo naši podatki. Vendar pa se nam intuitivno zdi, da lahko o verjetnosti govorimo tudi v primerih, ko gre za fundamentalno neponovljive poskuse. David Lewis (cit. po Childers, 2013, 36) npr. poda hipotetičen primer: znanstveniki odkrijejo neznan radioaktivni element Neznanijum³⁴⁶, ki je zelo redek, saj je v celotnem vesolju samo nekaj atomov tega elementa. Pričakujemo, da tudi za ta element velja, da ima neko določeno verjetnost razpada v nekem času. Ne smemo pa zato zapasti v problematično frekventistično vedenje – verjetnost namreč ni lastnost kolektiva, temveč posameznika, možnost razkroja pa posamezna možnost nekega elementa (ibid.). S tem smo dobili zelo sprejemljivo razlago verjetnosti in dobro osnovo za teoretično definicijo verjetnosti.

Prav to je tudi ena močnejših točk propenzitete: omogoča dobro razlago verjetnosti prek teoretičnega pojma propenzitete. Pojem propenzitete tako teoretično omeji verjetnost, ki pa je za znanost v tej obliki razmeroma neuporabna (čeprav odlično služi v filozofiji znanosti). Znanost namreč teži k posploševanju in iskanju skupnih lastnosti, opredelitev verjetnosti kot individualne lastnosti pa omogoča le na prvi pogled sprejemljivo razlago.

Druga težava (oz. za nekatere avtorje prednost) propenzitet je v tem, da implicirajo nedeterminizem: če živimo v determinističnem vesolju, potem je dejanska propenziteta (in verjetnost, ki je definirana preko nje) vedno 0 ali 1. Propenziteto tako pozdravljajo zagovorniki nedeterminizma (med katerimi je bil tudi Karl Popper), kar je po svoje razumljivo, saj najmočnejši fizikalni ugovori zoper determinizem izvirajo ravno iz kvantne mehanike, ki je bila povod za nastanek propenzitetne interpretacije.

18 Sklep

S propenzitetno interpretacijo zaključujem kratek pregled različnih tolmačenj verjetnosti. Pregled nam je pokazal, da imajo vse glavne interpretacije določene prednosti in pomanjkljivosti. Predvsem je potrebno opozoriti, da je teorija verjetnosti še vedno zelo živo področje. Matematično gledano sicer takih težav ni, saj je verjetnostni račun na osnovi aksiomov Kolmogorova dobro sprejet. Filozof Robert Stalnaker je zato konec šestdesetih upal, da bi mu lahko verjetnostni račun pomagal pri razreševanju filozofsko-logičnih težav s pogojnimi stavki oz. z njegovimi besedami: »[V]erjetnost bi lahko bila dober vir vpogleda v formalno strukturo pogojnih stavkov« (1970). Kot je na tem mestu morda že jasno, se njegovi upi niso potrdili – matematična uveljavljenost verjetnostnega računa žal ne zadošča za filozofsko sprejemljivost. Stalnaker je, kot je pozneje pokazal Lewis (1976), s tem prišel do trivialnih rezultatov. Naj ta primer služi zgolj za ilustracijo, kako je verjetnost zelo zanimiv in obetaven teoretičen pojem, ki ga uporabljamo tudi v vsakdanjem jeziku, hkrati pa še vedno tako neznan, da ga je treba previdno obravnavati.

Prav zato morda vse opisane interpretacije sploh ne obravnavajo enakega vprašanja. Zelo verjetno je, da subjektivna in objektivna verjetnost opredeljujeta dva ločena (a mestoma soodvisna) pojma; prvi opredeljuje kredence (stopnje verjetja), drugi pa npr. propenzitete (dispozicijske nagnjenosti določene). Zdi se, da subjektivne in

objektivne verjetnosti ne smemo na silo povezovati, saj bi s takšnim ravnanjem nujno reducirali določene pomembne vidike ene ali pa druge. Hkrati smo v zanimivi zadregi: ali ni izpostavljanje razlike med subjektivno in objektivno interpretacijo verjetnosti sumljivo podobno dualizmu duha in materije Descartovega kova? Podobno kot sem prej izpostavil indeterminizem, ki je implicitno prisoten v propenzitetni interpretaciji, je tako razvidno, da odločitev, katero (oz. katere) interpretacije verjetnosti sprejemamo, vedno vpeto v širši kontekst osnovnih filozofskih stališč, ki jih sprejemamo. In ker je teorija verjetnosti bistveno povezana z znanstvenim raziskovanjem, ima privrženost določeni interpretaciji verjetnosti vedno tudi (ne)slutene filozofske posledice, ki lahko vplivajo tudi na način interpretiranja znanstvenih podatkov.

Kakšni pa so obeti za razvoj teorij interpretacij v prihodnje? Na kratko izpostavimo samo eno izmed odprtih tem v subjektivni interpretaciji: nenatančno verjetnost. Z nenatančnimi verjetnostmi opisujemo pristop k verjetnostnemu računu, kjer verjetnost ni določena z natančno številčno vrednostjo, temveč s številčnim intervalom. Na tak način dobimo na prvi pogled bolj »človeško« obliko (sicer) strogo racionalnega bayesovskega pristopa k verjetnosti. Dobro namreč delujejo tudi pri računanju z epistemološko negotovostjo, ki je pri ljudeh pogosta. Natančna verjetnost ima veliko težav, ko z njo opredeljujemo stanja, o katerih nimamo nikakršnih podatkov. Če pri tem uporabimo običajen statistični pristop in enakomerno porazdelimo verjetnost tudi za ta stanja, s tem implicitno dodamo nove podatke (pričakovanje, kakšna naj bi bila verjetnost dogodkov, ki jih sicer povsem ignoriramo). Tej težavi (in nekaterim drugim paradoksom) naj bi se izognili prav z uporabo nenatančnih verjetnosti (oz. množici verjetnosti na nekem intervalu). Tudi ta pristop sicer omogoča kar nekaj ugovorov, npr. kako določiti zgornjo in spodnjo mejo nenatančne verjetnosti, hkrati pa odpira tudi formalne težave (npr. dilatacijo – prehod iz natančne v nenatančno verjetnost). Naj ta primer služi zgolj v ilustracijo, da so interpretacije verjetnosti še vedno v razvoju.

Verjetnost nam sicer služi predvsem kot vodilo ob soočanju z (vsakdanjimi) nejasnostmi. Ker pa je sama teorija verjetnosti še zelo nejasna, naj ta sklep velja tudi kot poziv k iskanju novih odgovorov na mnoga odprta vprašanja, ki sem jih nakazal v prispevku.

Literatura

- Bayes, T. (1731). *Divine Benevolence; or, An Attempt to Prove That the Principal End of the Divine Providence and Government Is the Happiness of His Creatures*. London: Printed for John Noon.
- Bayes, T. (1736). *An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and Defence of the Mathematicians Against the Objections of the Author of the Analyst, So Far As They Are Designed to Affect Their General Methods of Reasoning*. London: Printed for John Noon.
- Bayes, T. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions*: (Str. 371–418).
- Bernoulli, J. ([1713] 2006). *The Art of Conjecturing: Together with 'Letter to a Friend on Sets in Court Tennis'*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- Carnap, R. (1950). *Logical Foundations of Probability*. Chicago: University of Chicago Press.
- Carnap, R. (1956). The methodological character of theoretical concepts. V H. Feigl, in M. Scriven (Ur.) *Minnesota Studies in the Philosophy of Science I*: (Str. 37–76). Minnesota: University of Minnesota Press.
- Chater, N. in Oaksford, M. (Ur.) (2008). *The Probabilistic Mind: Prospects for Bayesian Cognitive Science*. Oxford University Press.
- Childers, T. (2013). *Philosophy and Probability*. Oxford: Oxford University Press.
- Coolen, F. P., Troffaes, M. C. in Augustin, T. (2010). Imprecise probability. V M. Lovric (Ur.) *International Encyclopedia of Statistical Science*. New York: Springer.
- Dale, A. I. (1995). *A History of Inverse Probability: From Thomas Bayes to Karl Pearson*: Št. 16 Studies in the History of Mathematics and the Physical Sciences. New York: Springer.
- David, F. N. (1998). *Games, Gods and Gambling: The Origins and History of Probability and Statistical Ideas from the Earliest Times to the Newtonian Era*. London: Dover.
- Easwaran, K. K. (2008). *The Foundations of Conditional Probability*. Doktorat: University of California, Berkeley.
- Fienberg, S. E. (2006). When did Bayesian inference become "Bayesian"? *Bayesian Analysis*: 1 (1): 1–41.
- Gillies, D. (2000). *Philosophical Theories of Probability*. London: Routledge.
- Hacking, I. (1984). *The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hájek, A. (2003). What conditional probability could not be. *Synthese*: 137 (3): 273–323.
- Hájek, A. (2009). Fifteen arguments against hypothetical frequentism. *Erkenntnis*: 70 (2): 211–235.
- Hájek, A. (2012). Interpretations of probability. V E. N. Zalta (Ur.) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. URL: <http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/probability-interpret/>.
- Hartmann, S. in Sprenger, J. (2010). Bayesian epistemology. V S. Bernecker, in D. Pritchard (Ur.) *Routledge Companion to Epistemology*: (Str. 609–620). London: Routledge.
- Jeffrey, R. (1992). *Probability and the Art of Judgement*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kahneman, D. in Tversky, A. (1982). Judgments of and by representativeness. V D. Kahneman, P. Slovic, in A. Tversky (Ur.) *Judgement under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kemeny, J. G. (1955). Fair bets and inductive probabilities. *Journal of Symbolic Logic*: str. 263–273.
- Keynes, J. (1921). *A Treatise on Probability*. London: Macmillan and Co.
- Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: Springer.
- Laplace, P.-S. M. ([1814] 1952). *Essai Philosophique sur les Probabilités*. New York: Dover Publications, Inc.
- Lewis, D. (1976). Probabilities of conditionals and conditional probabilities. *The Philosophical Review*: 85 (3): 297–315.
- Lewis, D. (1980). A subjectivist's guide to objective chance. V R. Jeffrey (Ur.) *Studies in Inductive Logic and Probability*, Vol. II: (Str. 263–293). University of California Press.
- Oaksford, M. in Chater, N. (2007). *Bayesian Rationality: The Probabilistic Approach to Human Reasoning*. Oxford University Press.
- Pascal, B. ([1669] 1986). *Misli*. Celje: Mohorjeva družba.

- Pérez-Escudero, A. in de Polavieja, G. G. (2011). Collective animal behavior from bayesian estimation and probability matching. *Computational Biology*.
- Popper, K. R. (1998). *Logika znanstvenega odkritja*. Ljubljana: Studia humanitatis.
- Ramsey, F. P. (1926 [1931]). Truth and probability. V E. Kyburg, in H. E. Smokler (Ur.) *Studies in Subjective Probability*. London: Wiley, 1964.
- Skyrms, B. (1980). *Causal Necessity*. New Haven: Yale University Press.
- Stalnaker, R. (1970). Probability and conditionals. *Philosophy of Science*: 37: 64–80.

