

## VPLIV KOMPLEKSNIH INTERAKCIJ NA RAZVOJ SODELOVANJA V IGRI JAVNIH DOBRIN

MAJA DUH<sup>1,2,3</sup>, MARKO GOSAK<sup>1,2,3</sup> in MATJAZ PERC<sup>2,4,5,6</sup>

### Sprejeto

23. 1. 2025

### Recenzirano

1. 4. 2025

### Izdano

28. 11. 2025

<sup>1,2,3</sup> Maja Duh, Univerza v Mariboru, Medicinska fakulteta, Inštitut za fiziologijo, Maribor, Slovenija; Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za fiziko, Maribor, Slovenija; Univerza Alma Mater Europaea, Maribor, Slovenija

[maja.duh3@um.si](mailto:maja.duh3@um.si)

<sup>1,2,3</sup> Marko Gosak, Univerza v Mariboru, Medicinska fakulteta, Inštitut za fiziologijo, Maribor, Slovenija; Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za fiziko, Maribor, Slovenija; Univerza Alma Mater Europaea, Maribor, Slovenija

[marko.gosak@um.si](mailto:marko.gosak@um.si)

<sup>2,4,5,6</sup> Matjaz Perc, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za fiziko, Maribor, Slovenija, Zdravstveni dom dr. Adolfa Drolca Maribor, Maribor, Slovenija; Complexity Science Hub, Dunaj, Avstrija; Univerza Kyung Hee, Oddelek za fiziko, Seul, Republika Koreja

[matjaz.perc@um.si](mailto:matjaz.perc@um.si)

### DOPISNI AVTOR

[maja.duh3@um.si](mailto:maja.duh3@um.si)

### Znanstvena veda:

Fizika

### Ključne besede:

evolucijska teorija iger, igra javnih dobrin, kompleksna omrežja, večplastna omrežja, Monte Carlo simulacije

Pojav in obstoj sodelovanja med sebičnimi posamezniki je eden najpomembnejših izzivov, ki še vedno vzbuja zanimanje znanstvenikov iz različnih raziskovalnih področij. Ključno orodje tovrstnih raziskav je postala evolucijska teorija iger, ki ponuja zanesljiv teoretični okvir za opis evolucijske dinamike strategij v družbenih dilemah. Hkrati pa napredki v znanosti o omrežjih bistveno izboljšujejo naše razumevanje številnih kompleksnih sistemov v realnem svetu, vključno z razvojem sodelovanja v skupinskih odločitvah in kolektivnem delovanju. Pri tem pa je zelo pomembno, kako so posamezniki vpeti v družbo. Raziskave, narejene v zadnjih treh desetletjih, so pokazale, da je struktura družbenih omrežij eden ključnih dejavnikov pri določanju uspešnosti sodelovanja. Ker se posamezniki v večini realnih situacij lahko premikajo, ima pomemben vpliv na razvoj kooperacije tudi mobilnost oziroma mešanje populacije. Osrednji cilj naših raziskav je bil preučiti, kako različna omrežja interakcij in mešanja igralcev vplivajo na evolucijo sodelovanja v igri javnih dobrin.



<https://doi.org/10.18690/analipazu.15.1-2.1-17.2025>  
Besedilo © Duh, Gosak in Perc 2025



## THE IMPACT OF COMPLEX INTERACTIONS ON THE EVOLUTION OF COOPERATION IN THE PUBLIC GOODS GAME

MAJA DUH<sup>1, 2, 3</sup>, MARKO GOSAK<sup>1, 2, 3</sup> in MATJAZ<sup>✓</sup> PERC<sup>2, 4, 5, 6</sup>

Accepted

23. 1. 2025

Revised

1. 4. 2025

Published

28. 11. 2025

<sup>1,2,3</sup> Maja Duh, University of Maribor, Faculty of Medicine, Institute of Physiology, Maribor, Slovenia; University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of Physics, Maribor, Slovenia; Alma Mater Europaea University, Maribor, Slovenia, [maja.duh3@um.si](mailto:maja.duh3@um.si)

<sup>1,2,3</sup> Marko Gosak, University of Maribor, Faculty of Medicine, Institute of Physiology, Maribor, Slovenia; University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of Physics, Maribor, Slovenia; Alma Mater Europaea University, Maribor, Slovenia, [marko.gosak@um.si](mailto:marko.gosak@um.si)

<sup>2,4,5,6</sup> Matjaz Perc, University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Department of Physics, Maribor, Slovenia; Community Healthcare Center Dr. Adolf Drolc Maribor, Maribor, Slovenia; Complexity Science Hub Vienna, Vienna, Austria; Kyung Hee University, Department of Physics, Seoul, Republic of Korea, [matjaz.perc@um.si](mailto:matjaz.perc@um.si)

CORRESPONDING AUTHOR

[maja.duh3@um.si](mailto:maja.duh3@um.si)

The emergence and persistence of cooperation among selfish individuals remain one of the most significant challenges that continues to intrigue scientists across various research fields. Evolutionary game theory has become a key tool in these studies, providing a robust theoretical framework to describe the evolutionary dynamics of strategies in social dilemmas. Simultaneously, advances in network science have significantly enhanced our understanding of numerous complex systems in the real world, including the development of cooperation in group decision-making and collective actions. A critical factor in this context is how individuals are embedded within society. Research over the past decades has showed that social network structure critically impacts cooperation. Moreover, as individuals are often mobile in most real-world scenarios, mobility and population mixing also play a crucial role in the evolution of cooperation. The primary aim of our study was to examine how different interaction networks and player mixing influence the evolution of cooperation in the public goods game.

Science:  
Physics

Keywords:

evolutionary game theory,  
public goods game,  
complex networks,  
multilayer networks,  
Monte Carlo simulations

## **1 Uvod**

Ljudje pogosto ravnamo nesebično in delujemo v dobro širše skupnosti, tudi če to pomeni zmanjšanje lastne koristi. Takšno vedenje se zdi na prvi pogled v nasprotju z Darwinovo teorijo naravne selekcije, ki daje prednost posameznikom, ki so najbolj prilagojeni za preživetje in razmnoževanje – kar pogosto vključuje sebično vedenje. Zakaj bi torej posamezniki sodelovali, če se zdi, da evolucija favorizira predvsem lastne interese (Pennisi, 2009)? Razumevanje razvoja sodelovanja oziroma kooperacije je eden najpomembnejših izzivov današnjega časa in je temeljnega pomena za razumevanje glavnih evulucijskih prehodov, ki so vodili evolucijo od enoceličnih organizmov do kompleksnih živalskih in človeških družb.

Osrednje teoretično orodje tovrstnih raziskav je evulucijska teorija iger, ki združuje načela klasične teorije iger s časovnim vidikom evolucije in poudarja evulucijsko dinamiko strategij znotraj populacij (Smith, 1982). Evulucijska teorija iger temelji na predpostavki, da igralci posnemajo tiste strategije, ki so najuspešnejše. Začetki evulucijske teorije iger segajo pol stoletja let nazaj, ko sta Smith in Price uporabila matematične modele teorije iger za razumevanje evolucije strategij v bioloških sistemih (Smith in Price, 1973). Medtem ko so biologi uporabljali teorijo iger za razumevanje vedenja živali, so družboslovci to metodo pozdravili kot novo orodje za razumevanje družbenega vedenja in "kulturne evolucije", ki se nanaša na spremembe človekovih prepričanj, vrednot, vedenjskih vzorcev in družbenih norm (Szabó in Fáth, 2007). Da bi lahko povezali teoretične modele z realnim obnašanjem ljudi v družbi, je potrebno teorijo dopolniti in preveriti z empiričnimi podatki iz eksperimentov. V ekonomskih eksperimentih udeleženci odločajo, kako razdeliti denar med seboj in drugimi. Pogosto potekajo v anonimnih okoliščinah, kjer ni družbenega pritiska. Ti eksperimenti so se pojavili v zgodnjih 80. letih (Güth, Schmittberger, 1982), sprva v laboratorijih, kasneje pa tudi na spletu. Ena od spletnih platform za izvajanje tovrstnih raziskav je Amazon Mechanical Turk, kjer naročniki, kot so podjetja in raziskovalci, objavljajo naloge, ki jih posamezniki opravijo za nizko plačilo (Rand, 2012).

Za proučevanje sodelovanja med pari igralcev se pogosto uporablja igra dileme zapornika, medtem ko se za proučevanje skupinskih interakcij najpogosteje uporablja igra javnih dobrin. Javne dobrine so dobrine, ki so značilne po tem, da so neizčrpne in težko izključljive. To pomeni, da lahko več ljudi istočasno uživa v

koristih teh dobrin, brez da bi zmanjšali razpoložljivost le-teh za druge. Hkrati je težko prepričati ljudi, da bi uživali v koristih, četudi ne prispevajo k njihovem financiranju ali vzdrževanju. Ljudem, ki si prizadevajo pridobiti ali uživati v dobrinah ali storitvah brez plačila ali minimalnih stroškov, pravimo zastonjkarji (Castellano, Fortunato in Loreto, 2009). V realnem svetu takih dobrin načeloma ni, lahko pa najdemo nekaj približkov, kot so čist zrak, pitna voda, znanje, javna razsvetljava, javno šolstvo, javno zdravstvo in podobno.

V študiji smo se osredotočili na raziskovanje skupinskih interakcij in kot prototip družbene dileme izbrali igro javnih dobrin. Uporabili smo standardno različico z dvema strategijama, kooperator in defektor, ki sta najpogosteje uporabljeni za preučevanje sodelovanja med posamezniki. Za proučevanje evolucije kooperacije smo uporabili interdisciplinarni pristop, ki povezuje evolucijsko teorijo iger z naprednimi metodami s področja znanosti o omrežjih in metodami statistične fizike. Te metode, zlasti metoda Monte Carlo in teorija kolektivnega obnašanja delcev v bližini faznih prehodov, so se izkazale kot najbolj primerne za analizo rezultatov kolektivnih pojavov, do katerih prihaja zaradi interakcij med posamezniki ali skupinami. Omogočajo natančno analizo ravnovesnih stanj, samoorganizacije in oblikovanja tipičnih vzorcev v različnih populacijah agentov (Castellano, Fortunato in Loreto, 2009). V naših simulacijah smo razvoj igre javnih dobrin postavili na različna interakcijska omrežja in model nadgradili z različnimi modeli mešanja igralcev.

## 2 Igra javnih dobrin

V igri javnih dobrin sodelujejo v posamezni igri vsaj trije igralci. Shema igre je predstavljena na sliki 1a. Vsak igralec  $i$  ima  $k_i$  direktnih ali najbližjih sosedov na danem omrežju in igra igro javnih dobrin v  $G = k_i + 1$  prekrivajočih se skupinah. Vsaka skupina je sestavljena iz osrednjega igralca  $i$  in njegovih  $k_i$  najbližjih sosedov. Na začetku igre je vsak igralec naključno določen kot kooperator ( $C$ ) ali defektor ( $D$ ) z enako verjetnostjo. Igralec, ki je kooperator, v skupno blagajno prispeva neko fiksno vrednost ( $s_i = 1$ ), medtem ko defektor ne prispeva nič ( $s_i = 0$ ). Potem, ko vsi igralci vložijo v skupno blagajno svoj prispevek, vsoto vložkov znotraj posamezne skupine pomnožimo s t. i. sinergijskim faktorjem  $R$ , ki je večji od 1 in ni večji od števila vseh igralcev  $N$ . Sinergijski faktor opisuje, kako učinkovito sistem pretvarja individualne prispevke v korist za celotno skupnost. Vrednost iz blagajne

se nato enakomerno porazdeli med vse igralce dane skupine, ne glede na njihovo strategijo. Vsak igralec  $i$  v dani skupini  $g$  tako dobi kot izplačilo številsko vrednost:

$$P_i^g = \frac{RN_C^g}{G} - s_i, \quad \text{(Napaka! V dokumentu ni besedila z navedenim slogom.)}$$

pri čemer je  $N_C^g$  število kooperatorjev znotraj skupine  $g$ . Ker vsak igralec  $i$  sodeluje v  $G$  prekrivajočih se skupinah (slika 1c), je njegovo končno izplačilo  $P_i$  sestavljeno iz izplačil vseh skupin, katerih član je izbrani igralec:  $P_i = \sum_g P_i^g$ . V primeru, da se število direktnih sosedov razlikuje od igralca do igralca, sinergijski faktor  $R$  normaliziramo z velikostjo pripadajoče skupine in s tem omogočimo smiselno primerjavo rezultatov (Traulsen in Glynatsi, 2023).

Evolucija strategij poteka v skladu s proceduro Monte Carlo simulacij, ki obsega naslednje korake. V prvem koraku naključno izberemo igralca  $i$ , ki igra igro javnih dobrin kot član vseh  $g = 1, \dots, G$  skupin in izračunamo njegovo izplačilo  $P_i$  (enačba 1). V naslednjem koraku naključno izberemo enega izmed njegovih najbližjih sosedov  $j$  in na enak način izračunamo izplačilo  $P_j$ , ki ga prejme ta igralec. Igralec  $j$  bo prevzel strategijo igralca  $i$  z verjetnostjo, ki jo določa Fermijeva funkcija izplačilo:

$$W(s_i \rightarrow s_j) = \frac{1}{1 + \exp[(P_j - P_i)/K]}, \quad (2)$$

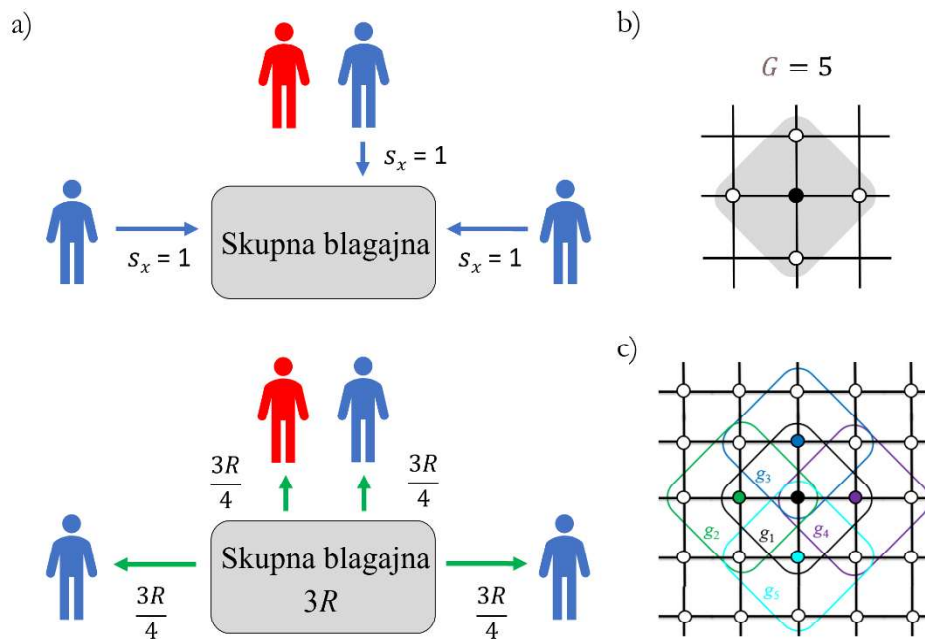
kjer je  $K$  nedoločenost osvojitve strategije in je v naših simulacijah enaka 0.5 brez izgube splošnosti (Szabó in Fáth, 2007). Če velja  $P_i > P_j$ , potem v limiti  $K \rightarrow 0$  igralcu  $i$  vedno uspe vsiliti svojo strategijo igralcu  $j$ . V primeru  $K > 0$  pa so lahko zaradi nepredvidljivih variacij v izplačilih ali napak pri sprejemanju odločitev sprejete tudi slabše strategije, kar naredi model bolj realen. Opisane korake ponovimo  $N$ -krat, kjer je  $N$  število vseh igralcev. S tem zagotovimo, da ima vsak igralec možnost znotraj enega zaključenega Monte Carlo koraka v povprečju enkrat spremeniti svojo strategijo. Povprečni oziroma ravnovesni delež defektorjev ( $\rho_D$ ) in kooperatorjev ( $\rho_C$ ) določimo v stacionarnem stanju sistema, ko se njuni vrednosti s časom bistveno več ne spreminjata.

### 3 Evolucijske igre na različnih interakcijskih mrežah

V dobro mešani populaciji, kjer so skupine za igranje evolucijskih iger tvorjene z naključno izbiro igralcev, je razvoj sodelovanja močno oviran in kooperatorji ne morejo preživeti, če velja  $R < G$ , kjer je  $R$  sinergijski faktor in  $G$  velikost skupine, ki igra evolucijsko igro (Cinyabuguma, Page in Putterman, 2005). Ker pa so interakcije med posamezniki v realnosti le redko naključne in največkrat posameznik interagira le z majhno skupino ljudi v svoji bližnji okolici, je smiselno evolucijske igre postaviti na interakcijska omrežja in razvoj sodelovanja raziskovati z orodji s področja znanosti o omrežjih. Najbolj preprost primer interakcijskega omrežja je regularna mreža, kjer imajo vsi vozli enako število povezav. Vozli mreže predstavljajo posamezne igralce igre, povezave med sosednimi vozli pa interakcije med igralci. Na sliki 1b je primer regularnega kvadratnega omrežja, kjer v vsaki igri sodeluje 5 igralcev (slika 1b) in vsak igralec igra igro v 5 prekrivajočih se skupinah (slika 1c). Ker imajo v realnem svetu agenti običajno različno število povezav do drugih agentov, regularna omrežja predstavljajo razmeroma slab model za opis realnih omrežij. Pomemben korak k bolj realistični predstavitvi evolucijskih iger je bil premik iz regularnih na kompleksna omrežja, kot so na primer skalno neodvisne mreže (Rong, Li in Wang, 2007), omrežja malega sveta (Santos, Rodrigues in Pacheco, 2005), hierarhična omrežja (Vukov in Szabó, 2005), dinamična omrežja (Pacheco, Traulsen in Nowak, 2006), omrežja višjih stopenj (Alvarez-Rodriguez in drugi, 2020) in druga.

Nedavno so se pojavili novi mrežni modeli, ki učinkovito zaobjemajo najpomembnejše strukturne lastnosti realnih omrežij, kot na primer naključna omrežja, vpeta v hiperbolični prostor. Ti modeli so znani po svojih lastnostih, ki jih pogosto najdemo tudi v realnih omrežjih, kot so kratka povprečna najkrajša pot, velika stopnja gručavosti, prisotnost skupnosti in heterogenost v porazdelitvi števila povezav posameznih vozlov (Boguñá, Papadopoulos in Krioukov, 2010), zaradi česar so priljubljena izbira za simulacijo različnih družbenih pojavov, vključno z evolucijsko teorijo iger (Duh, Gosak in Perc, 2021; Duh, Gosak in Perc, 2023; Kleineberg, 2017). Vsak vozle v hiperboličnem disku ima kotno in radialno koordinato. Kotna koordinata nakazuje na podobnost vozlov. Vozli, ki so bližje skupaj predstavljajo npr. ljudi, ki živijo na istem področju ali pripadajo enaki skupnosti. Radialna koordinata pa ponazarja njihovo pomembnost (popularnost) in

s tem številu povezav vozlišča, pri čemer so vozlišča z več povezavami bližje središču diska.



Slika 1: Igra javnih dobrin na regularni kvadratni mreži. a) Shematski prikaz igre javnih dobrin. Vsak igravec, ki je kooperator, v skupno blagajno prispeva vrednost  $s_x = 1$ , medtem ko igravec, ki je defektor, ne prispeva nič. Vsoto vložkov (v našem primeru je to 3) nato pomnožimo s sinergijskim faktorjem  $R$  in končno vrednost ( $3R$ ) enakomerno porazdelimo med vse igralce, ne glede na strategijo igralca. b) V primeru regularnega kvadratnega omrežja v vsaki igri sodeluje 5 igralcev. c) Vsak igravec igra igro v 5 prekrivajočih se skupinah.

Vir: lasten

V zadnjih letih se je težišče raziskav premaknilo iz enoplastnih in izoliranih omrežij k večplastnim in soodvisnim omrežjem (Wang, Szolnoki in Perc, 2012), kar je odprlo številne nove možnosti za raziskovanje razvoja in vzdrževanja sodelovanja. Ta premik je predvsem posledica dejstva, da posamezniki pogosto pripadajo več omrežjem hkrati, zaradi česar so soodvisne mreže bolj relevantne za opis realnih sistemov kot enoplastna oziroma izolirana omrežja. V naših študijah smo se osredotočili na dvoplastna soodvisna omrežja, kjer smo dve omrežji povezali preko funkcije koristnosti (angl. utility), ki določa v kolikšni meri izplačilo igralca na eni mreži vpliva na uspeh igralca na drugi mreži (Wang, Szolnoki in Perc, 2012).

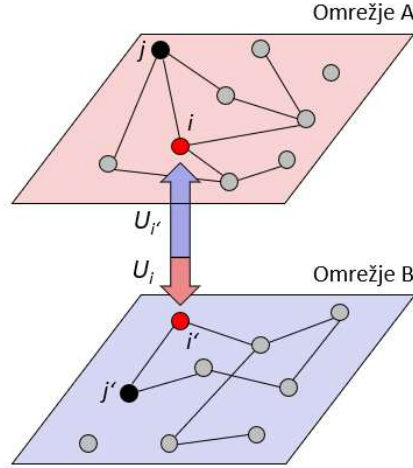
#### 4 Igra javnih dobrin na dvoplastnem soodvisnem omrežju

Če igro javnih dobrin postavimo na dvoplastno omrežje (slika 2) ima vsak igralec  $i$  natanko  $k_i$  direktnih ali najbližjih sosedov na danem omrežju (A) in enega partnerja  $i'$  na drugem omrežju (B). Tako kot pri igri na eni plasti, je tudi v tem primeru na začetku vsak igralec naključno določen kot kooperator (C) ali defektor (D) z enako verjetnostjo. Igralci zbirajo izplačila na obeh plasteh po enaki proceduri, kot smo jo opisali v prejšnjem poglavju **Napaka! Vira sklicevanja ni bilo mogoče najti.** Končno izplačilo vsakega igralca na omrežju A bo tako enako  $P_i = \sum_g P_i^g$ , igralca na omrežju B pa  $P_{i'} = \sum_g P_{i'}^g$ . Ker je izplačilo danega igralca  $i$  odvisno tudi od izplačila partnerja  $i'$  na drugi plasti, soodvisnost med omrežjema A in B vpeljemo preko t. i. funkcije koristnosti (Wang, Szolnoki in Perc, 2012):

$$U_i = \alpha P_i + (1 - \alpha) P_{i'} \text{ in } U_{i'} = (1 - \alpha) P_{i'} + \alpha P_i, \quad (3)$$

kjer je  $\alpha$  parameter pristranskosti in določa jakost učinkovanja medplastnih povezav ali pristranskost med izplačili igralca  $i$  na omrežju A in igralca  $i'$  na omrežju B. Ko je vrednost parametra pristranskosti  $\alpha$  majhna, je končno izplačilo igralca  $i$  v glavnem odvisno od izplačila igralca  $i'$ , medtem ko igralec  $i$  le malo vpliva na izplačilo igralca  $i'$ . Za vrednost  $\alpha = 0.5$  obe izplačili igralcev ( $P_i$  in  $P_{i'}$ ) enakovredno vplivata na oba igralca ( $i$  in  $i'$ ) in evolucija igre je na obeh omrežjih (A in B) statistično enaka. Obratno velja, ko je vrednost  $\alpha$  med 0.5 in 1. Takrat se vloži igralcev  $i$  in  $i'$  obrneta in rezultati so popolnoma simetrični rezultatom v primeru ko je  $\alpha$  med 0 in 0.5. V primeru, da je  $\alpha = 1$  ( $\alpha = 0$ ) je dinamika igre na omrežju A (B) enaka igri na enoplastnem izoliranem omrežju, medtem ko igro na omrežju B (A) popolnoma določajo izplačila igralcev na omrežju A (B).

Evolucija strategij poteka, enako kot na enoplastnem omrežju, v skladu s proceduro Monte Carlo simulacij. Potem, ko naključno določimo igralca  $i$  na plasti A, enega od njegovih najbližjih sosedov  $j$  in pripadajoča igralca  $i'$  in  $j'$  na drugi plasti B, sledi izračun pripadajočih izplačil in funkcij koristnosti. Če upoštevamo, da je prenos strategij možen samo med sosedi na istem omrežju, potem igralec  $i$  prevzame strategijo igralca  $j$  z verjetnostjo, ki jo definira Fermijeva funkcija (enačba 2). Prenos strategije med igralcema  $i'$  in  $j'$  je izveden na podoben način, le da uporabimo pripadajoče vrednosti funkcij koristnosti  $U_{i'}$  in  $U_{j'}$ .



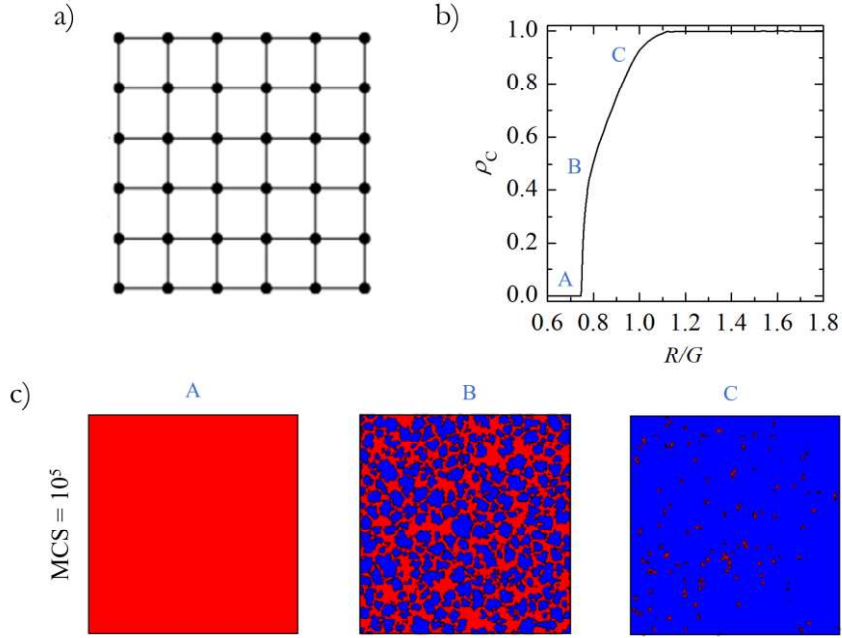
Slika 2: Shematski prikaz igre javnih dobrin na dvoplastnem soodvisnem omrežju. Igralec  $i$  na omrežju A igra igro javnih dobrin s svojim direktnim sosedom  $j$ . Njegovo izplačilo je odvisno tudi od izplačila njegovega partnerja  $i'$  na omrežju B, ki igra igro javnih dobrin s svojim direktnim sosedom  $j'$ .

Soodvisnost med omrežjema A in B je vpeljana preko funkcije koristnosti, definirane z enačbo 3.

Vir: (Duh, 2024)

## 5 Rezultati

Najprej smo simulirali igro javnih dobrin na najbolj osnovni interakcijski mreži, na regularnem kvadratnem omrežju, kjer ima vsak igralec natanko 4 najbližje sosede (slika 3a). Graf na sliki 3b prikazuje ravnovesni delež kooperatorjev ( $\rho_C$ ) v odvisnosti od normiranega sinergijskega faktorja ( $R/G$ ). Rezultati Monte Carlo simulacij so bili pridobljeni na mreži z  $N = 160000$  vozlišči in periodičnimi robnimi pogoji. Ravnotežni delež kooperatorjev je bil določen s povprečenjem zadnjih  $10^4$  ponovitev po  $10^5$  Monte Carlo korakih, ko je sistem že v ravnovesnem stanju. Na sliki 3c so prikazane barvno kodirane 2D krajevne slike igre javnih dobrin za tri vrednosti normiranega sinergijskega faktorja (A:  $R/G = 0.7$ , B:  $R/G = 0.75$  in C:  $R/G = 1.0$ ). Kooperatorji so označeni z modro, defektorji pa z rdečo barvo. Za majhne vrednosti sinergijskega faktorja v sistemu obstajajo samo defektorji. Pri vrednosti  $R/G = 0.75$  pa začnejo kooperatorji tvoriti značilne skupke, znotraj katerih si lahko med sabo pomagajo in se ščitijo pred defektorji. Z večanjem sinergijskega faktorja je delež kooperatorjev vedno večji in pri vrednosti  $R/G = 1.1$  kooperatorji v sistemu povsem prevladajo, defektorji pa izumrejo.



Slika 3: Igra javnih dobrin na regularnem kvadratnem omrežju. a) Shematski prikaz regularnega kvadratnega omrežja, kjer ima vsak igralec natanko 4 najbližje sosede. b) Ravnovesni delež kooperatorjev v odvisnosti od normiranega sinergijskega faktorja. c) Barvno kodirane 2D krajevne slike igre za tri vrednosti normiranega sinergijskega faktorja (A:  $R/G=0.7$ , B:  $R/G=0.75$  in C:  $R/G=1.0$ ).

Vir: lasten

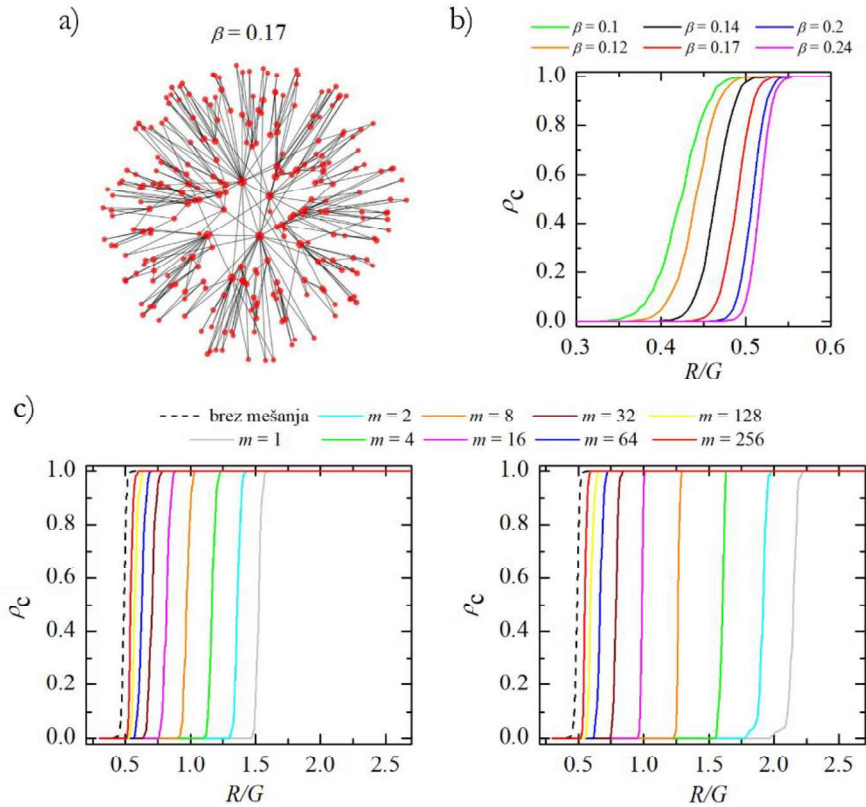
V nadaljevanju smo raziskavo razširili na področje kompleksnih omrežij, ki podajajo realnejši opis interakcij med posamezniki in igro javnih dobrin postavili na naključno omrežje, vpeto v hiperbolični prostor. Interakcijske mreže smo generirali s pomočjo modela preferenčnega povezovanja (Zuev in drugi, 2015). Na sliki 4a je prikazano naključno omrežje, vpeto v hiperbolični prostor, katerega vrednost mrežnega parametra ustreza  $\beta = 0.17$ . S spreminjanjem parametra  $\beta$ , ki kontrolira porazdelitev števila povezav posameznih vozlov, lahko generiramo omrežja z različnimi stopnjami heterogenosti, učinkovitosti in gručavosti. V modelu smo uporabili omrežje z  $N = 10000$  igralci, na sliki pa je za lažjo ponazoritev prikazanih le 250 vozlov. Za določitev ravnovesnega deleža kooperatorjev smo povprečili zadnjih  $10^4$  ponovitev po prehodnem obdobju  $10^5$  časovnih korakov Monte Carlo. Poleg tega smo končne rezultate povprečili 10 do 100-krat za vsak set parametrov.

Najprej smo raziskali, kako parameter  $\beta$  vpliva na razvoj kooperacije v igri javnih dobrin. V ta namen smo generirali omrežne arhitekture za različne vrednosti tega parametra. Kot je razvidno iz slike 4b, je razvoj kooperacije bolj verjeten v heterogenih omrežjih kot v homogenih omrežjih. Bolj kot je omrežje homogeno, tj. večji kot je parameter  $\beta$ , večje vrednosti normaliziranega sinergijskega faktorja  $R/G$  rabimo, da kooperatorji preživijo in kasneje tudi prevladajo.

S takim modelom omrežja se sicer dobro približamo opisu realnih omrežij, ampak v njem ne upoštevamo časovne dinamike realnih omrežij. V večini realnih situacij se namreč posamezniki lahko premikajo in pri tem spreminjajo svojo mrežo interakcij. Mobilnost je ena od ključnih značilnosti družbenih in bioloških sistemov ter ima pomembno vlogo pri preučevanju evolucijskih iger. Medtem ko živali iščejo primerne habitate z optimalno količino hrane, se ljudje selimo zaradi izboljšanja življenjskega standarda, kariernih priložnosti, vzpostavljanja socialnih povezav in drugih osebnih razlogov. Da bi razumeli vpliv mobilnosti na razvoj sodelovanja, so raziskovalci predlagali različne modele mobilnosti (Perc in drugi, 2013). V naslednjem koraku smo tako model igre javnih dobrin nadgradili s korakom mešanja igralcev. Korak mešanja izvedemo po vsakem zaključenem  $m$ -tem Monte Carlo koraku. Znotraj enega koraka mešanja ima igralec  $u$  v povprečju enkrat možnost zamenjati svojo pozicijo z drugim igralcem  $z$ . Če je npr. frekvenca mešanja  $m = 2$ , to pomeni, da bomo po vsakem drugem zaključenem Monte Carlo koraku menjali  $N$  naključno izbranih parov igralcev, kjer je  $N$  število vseh igralcev na dani interakcijski mreži. Manjša kot je torej vrednost parametra  $m$ , večja je frekvenca mešanja. Posamezne pare igralcev, ki zamenjajo svoj položaj, lahko določimo na različne načine. En način izbire je glede na stopnjo povezanosti oziroma število povezav izbranega igralca na omrežju. Tako pri asortativnem mešanju naključno izbran igralec  $u$  zamenja svoj položaj z igralcem  $z$ , ki ima podobno število povezav (izbran igralec menja položaj z igralcem, ki je na podobni radialni oddaljenosti). Pri disasortativnem mešanju pa položaj zamenjata igralca, ki se razlikujeta v številu povezav (na primer igralec na robu diska zamenja mesto z nekom blizu centra diska).

Na sliki 4c so prikazani rezultati asortativnega (levi panel) in disasortativnega mešanja (desni panel), za devet različnih frekvenc mešanja na naključnem omrežju, vpetem v hiperbolični prostor, katerega mrežni parametra  $\beta$  ustreza vrednosti  $\beta = 0.17$ . Izkaže se, da oba tipa mešanja zavirata razvoj sodelovanja, a je vpliv

disasortativnega mešanja večji v primerjavi z asortativnim mešanjem. Večja kot je frekvenca mešanja (manjša kot je vrednost parametra  $m$ ), večja vrednost normaliziranega sinergijskega faktorja  $R/G$  je potrebna, da kooperatorji preživijo. Tako se npr. evolucijska dinamika sistema, kjer igralce mešamo s frekvenco  $m = 256$ , bistveno ne razlikuje od sistema brez mešanja igralcev.



Slika 4: Igra javnih dobrin na naključnih omrežjih, vpetih v hiperbolični prostor. a) Shematski prikaz naključnega omrežja, vpetega v hiperbolični prostor, za vrednost mrežnega parametra  $\beta = 0.17$ . b) Igra javnih dobrin na različno heterogenih naključnih omrežjih, vpetih v hiperbolični prostor. Prikazanih je šest različnih omrežij generiranih z različnimi vrednostmi parametra  $\beta$ . Manjši kot je ta mrežni parameter, bolj je omrežje heterogeno. c) Rezultati asortativnega (levi panel) in disasortativnega mešanja (desni panel), za devet različnih frekvenc mešanja na naključnem omrežju, vpetem v hiperbolični prostor, katerega mrežni parametra  $\beta$  ustreza vrednosti  $\beta = 0.17$ .

Vir: (Duh, 2024)

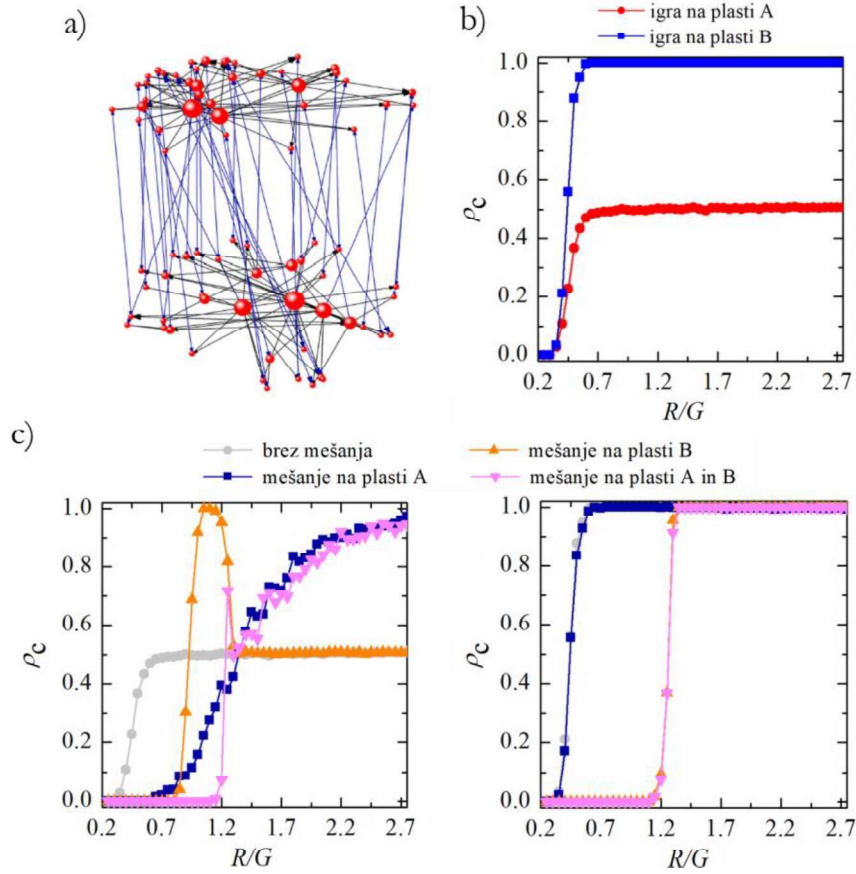
Da bi se čimbolj približali opisu realnih omrežij, smo nadalje preučevali razvoj sodelovanja v igri javnih dobrin na dveh soodvisnih omrežjih, pri čemer vsaka plast predstavlja naključno omrežje, vpeto v hiperbolični prostor. Soodvisnost med dvema omrežjema smo vpeljali s funkcijo koristnosti, ki smo jo predstavili v 3. poglavju. Medmrežne povezave med omrežjema smo določili tako, da je vsak igralec na omrežju A povezan s svojim najbližjim sosedom na omrežju B. Shematska predstavitev takega modela mreže je prikazana na sliki 5a. Za ponazoritev je prikazanih le 40 vozlišč na posamezni plasti, čeprav smo v simulacijah uporabili za eno mrežo  $N = 2500$  vozlišč. Za določitev ravnovesnega deleža kooperatorjev smo povprečili zadnjih  $10^4$  ponovitev po prehodnem obdobju  $10^5$  časovnih korakov Monte Carlo. Poleg tega smo končne rezultate povprečili na podlagi 400 neodvisnih zagonov za vsak niz vrednosti parametrov (20 različnih začetnih pogojev in 20 različnih topologij mrež).

Na sliki 5b je prikazan ravnovesni delež kooperatorjev ( $\rho_C$ ) v odvisnosti od normaliziranega sinergijskega faktorja ( $R/G$ ), pridobljen na dveh soodvisnih mrežah, vpetih v hiperbolični prostor, generirani z parametrom rasti  $\beta = 0.17$ . Vrednost parametra pristranskosti, ki določa soodvisnost med omrežjema, je  $\alpha = 0.01$ . Rdeča krivulja s krogci prikazuje rezultate igre na omrežju A, medtem ko modra krivulja s pravokotniki prikazuje rezultate igre na omrežju B. Za  $\alpha = 0.01$  je razvoj sodelovanja na omrežju A v glavnem (99%) odvisen od izplačil igralcev na omrežju B, medtem ko je razvoj sodelovanja na omrežju B skoraj identičen razvoju sodelovanja na izoliranem naključnem omrežju, vpetem v hiperbolični prostor (Duh, Gosak in Perc, 2021). Kooperatorji na omrežju B popolnoma prevladajo za vrednosti  $R/G > 0.6$ , medtem ko na omrežju A za nobeno vrednost  $R/G$  ne prevlada nobena od strategij.

V naslednjem koraku smo v model uvedli naključno mešanje igralcev, pri čemer zamenjamo pozicije naključno določenim parom igralcev, ne glede na njihovo pozicijo na hiperboličnem disku in s tem neodvisno od stopnje povezav posameznih igralcev. Mešanje igralcev izvedemo na eni (A ali B) in na obeh (A in B) omrežjih. Rezultati so predstavljeni na sliki 5c. Na levem panelu so prikazani rezultati igre na omrežju A, na desnem panelu pa rezultati igre na omrežju B. Podobno kot na sliki 5b, so rezultati pridobljeni na dveh soodvisnih mrežah, vpetih v hiperbolični prostor, generirani z parametrom rasti  $\beta = 0.17$ , vrednost parametra pristranskosti pa je  $\alpha = 0.01$ . Naključno mešanje vpeljemo po vsakem 10-em Monte Carlo koraku, pri

čemer zamenja svoj položaj  $N$  naključno izbranih parov igralcev. Vidimo, da uvedba naključnega mešanja igralcev samo na omrežju A (temno modra linija s pravokotniki) nima vpliva na razvoj sodelovanja na omrežju B. To je razumljivo, saj izplačila igralcev omrežja A skorajda nimajo vpliva na igro na omrežju B. Mešanje na omrežju A pa premakne kritično vrednost normaliziranega sinergijskega faktorja, nad katero se pojavijo kooperatorji, k višjim vrednostim  $R/G$  in poveča stopnjo uspešnosti kooperatorjev na omrežju A.

Ko uvedemo mešanje igralcev samo na omrežju B (polna oranžna linija s trikotniki), so rezultati še bolj presenetljivi. Rezultati kažejo na to, da mešanje na omrežju B oslabi evolucijsko uspešnost kooperatorjev na tem omrežju, medtem ko jo spodbuja za določene vrednosti normaliziranega sinergijskega faktorja  $R/G$  na omrežju A. Ko je normaliziran sinergijski faktor dovolj velik, kooperatorji popolnoma prevladajo, česar pa ni mogoče doseči brez uvedbe mešanja na tem omrežju. Mešanje igralcev na obeh omrežjih A in B (polna rožnata linija z obrnjenimi trikotniki) privede na omrežju A do skoraj enakih rezultatov kot mešanje samo na omrežju A. Podobno so rezultati na omrežju B so skoraj enaki rezultatom, pridobljenim z mešanjem samo na plasti B.



Slika 5: Igra javnih dobrin na dveh naključnih omrežjih, vpetih v hiperbolični prostor. a) Shematski prikaz dveh soodvisnih naključnih omrežjih, vpetih v hiperbolični prostor. b) Ravnovesni delež kooperatorjev v odvisnosti od normaliziranega sinergijskega faktorja, pridobljen na dveh soodvisnih mrežah, vpetih v hiperbolični prostor, ki sta generirani z parametrom rasti  $\beta = 0.17$  in parametrom pristranskosti je  $a = 0.01$ . c) Uvedba naključnega mešanja igralcev na eni ali obeh plasteh. Levi panel predstavlja rezultate pridobljene na omrežju A, desni panel pa rezultate pridobljene na omrežju B.

Vir: (Duh, 2024)

## 6 Zaključek

Sodelovanje je eden ključnih temeljev uspešnega delovanja družbe, saj omogoča učinkovito reševanje skupnih izzivov. Čeprav smo kot posamezniki unikatni, naše obnašanje v velikih skupinah postane napovedljivo. Statistična fizika omogoča razumevanje takšnih kolektivnih pojavov, ki nastajajo zaradi interakcij med posamezniki, podobno kot to opisujemo pri delcih v snovi. Ključno orodje tovrstnih raziskav je evolucijska teorija iger, pri čemer se za preučevanje obnašanja v skupinah večjega števila oseb oziroma skupinskih interakcij najpogosteje uporablja igra javnih dobrin.

V prispevku smo raziskali evolucijo kooperacije v igri javnih dobrin na različnih interakcijskih mrežah. Kombinirali smo napredne metode s področja znanosti o omrežjih, evolucijsko teorijo iger in orodja statistične fizike, kot so Monte Carlo simulacije in teorija faznih prehodov. Osredotočili smo se na vpliv kompleksnih večplastnih interakcij, s katerimi se čimbolj približamo opisu realnih omrežij in kot nadgradnjo v model vnesli mešanje oziroma mobilnost igralcev.

Rezultati raziskave kažejo, da so metode statistične fizike in teorije grafov zelo primerne za analizo socio-ekonomskih problemov in omogočajo vpogled v razumevanje obnašanja posameznikov v skupnosti, kar je ključno za oblikovanje politik in institucij, ki spodbujajo sodelovanje ter ustvarjajo učinkovite rešitve za skupne izzive, kot so varstvo okolja, zdravstveno varstvo ali izobraževanje. Poleg tega evolucijska teorija iger omogoča analizo strategij in njihovega razvoja skozi čas, kar je še posebej pomembno pri načrtovanju strategij v tržnem okolju in pri oblikovanju politik za spodbujanje konkurenčnosti in inovacij. Razumevanje dinamike iger javnih dobrin je ključno tudi za ocenjevanje učinkovitosti institucij in politik. To omogoča oblikovanje bolj učinkovitih politik, ki spodbujajo sodelovanje in ustvarjajo pozitivne učinke za celotno družbo. Nadgradnje dosedanjih modelov, ki smo jih vpeljali v našo študijo in zaobjemajo kompleksne večplastne interakcije in različne migracije igralcev so značilnosti, ki krojijo kolektivno vedenje številnih realnih socio-ekonomskih sistemov. Naše ugotovitve tako pomembno prispevajo k razvoju tega področja in vodijo do boljšega razumevanja vedenjskih vzorcev takih sistemov.

## Literatura

- Alvarez-Rodriguez, U. in drugi (2020). Evolutionary Dynamics of Higher-Order Interactions in Social Networks. *Nature Human Behaviour* 5(5): 586–95.
- Boguñá, M., Papadopoulos, F. in Krioukov, F. (2010). Sustaining the Internet with Hyperbolic Mapping. *Nature Communications* 1(6): 1–8.
- Castellano, C., Fortunato, S. in Loreto, V. (2009). Statistical Physics of Social Dynamics. *Reviews of Modern Physics* 81(2): 591–646.
- Cinyabuguma, M., Page, T. in Putterman, L. (2005). Cooperation under the Threat of Expulsion in a Public Goods Experiment. *Journal of Public Economics* 89(8 SPEC. ISS.): 1421–35.
- Duh, M. (2024). Vpliv mešanja in kompleksnih interakcij na razvoj sodelovanja v igri javnih dobrin (Doktorska disertacija). Univerza v Mariboru.
- Duh, M., Gosak, M. in Perc, M. (2021). Public Goods Games on Random Hyperbolic Graphs with Mixing. *Chaos, Solitons and Fractals* 144: 110720.
- Duh, M., Gosak, M. in Perc, M. (2023). Unexpected paths to cooperation on tied hyperbolic networks. *Europhysics Letters* 142: 6.
- Güth, W., Schmittberger, R. in Schwarze, B. (1982). An Experimental Analysis of Ultimatum Bargaining. *Journal of Economic Behavior & Organization* 3(4): 367–88.
- Kleineberg, K. K. (2017). Metric Clusters in Evolutionary Games on Scale-Free Networks. *Nature Communications* 8(1).
- Pacheco, J. M., Traulsen, A. in Nowak, M. A. (2006). Coevolution of Strategy and Structure in Complex Networks with Dynamical Linking. *Physical Review Letters* 97(25): 258103.
- Pennisi, E. (2009). On the Origin of Cooperation. *Science* 325(5945): 1196–99.
- Perc, M. in drugi (2013). Evolutionary Dynamics of Group Interactions on Structured Populations: A Review. *Journal of the Royal Society Interface* 10(80).
- Rand, D. G. (2012). The Promise of Mechanical Turk: How Online Labor Markets Can Help Theorists Run Behavioral Experiments. *Journal of Theoretical Biology* 299: 172–79.
- Rong, Z., Li, X. in Wang, X. (2007). Roles of Mixing Patterns in Cooperation on a Scale-Free Networked Game. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 76(2): 027101.
- Santos, F. C., Rodrigues, J. F. in Pacheco, J. M. (2005). Epidemic Spreading and Cooperation Dynamics on Homogeneous Small-World Networks. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 72(5): 056128.
- Smith, J. M. in Price, G. R. (1973). The Logic of Animal Conflict. *Nature* 246: 15–18.
- Smith, J. M. (1982). *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press.
- Szabó, G. in Fáth, G. (2007). Evolutionary Games on Graphs. *Physics Reports* 446(4–6): 97–216.
- Traulsen, A. in Glynatsi, N. E. (2023). The Future of Theoretical Evolutionary Game Theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences* 378(1876).
- Vukov, J. in Szabó, G. (2005). Evolutionary Prisoner's Dilemma Game on Hierarchical Lattices. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 71(3): 036133.
- Wang, Z., Szolnoki, A. in Perc, M. (2012). Evolution of Public Cooperation on Interdependent Networks: The Impact of Biased Utility Functions. *Epl* 97(4): 1–6.
- Zuev, K., Boguñá, M., Bianconi, G. in Krioukov, D. (2015). Emergence of Soft Communities from Geometric Preferential Attachment. *Scientific Reports* 5: 1–9.