

Uporaba matematične analize pri načrtovanju motorjev s trajnimi magneti

Application of mathematical analysis in the design of permanent magnet motors

Melita Hajdinjak^{1*}, Martin Mavrič² in Damijan Miljavec²

¹ Laboratorij za uporabno matematiko in statistiko, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani

² Laboratorij za električne stroje, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani

E-Mails: melita.hajdinjak@fe.uni-lj.si; martin.mavric@fe.uni-lj.si; damijan.miljavec@fe.uni-lj.si

*Avtor za korespondenco; Tel.: +386-1-4768-385

Povzetek: Razvoj trajnih (permanentnih) magnetov z visoko gostoto energije in njihova dostopnost na trgu vplivata na povečano uporabo magnetov v sinhronskih motorjih. Za delovanje motorja s trajnimi magneti je ključnega pomena magnetno polje v zračni reži med rotorjem in statorjem, ki ga rotor s trajnimi magneti pri vrtenju ustvarja. Gostoto magnetnega pretoka v zračni reži ter v trajnih magnetih rotorja dobimo kot rešitev sistema parcialnih diferencialnih enačb, ki opisuje magnetno dogajanje v motorju. Ta sistem ni vedno v celoti analitično rešljiv.

Ključne besede: motorji s trajnimi magneti; magnetno polje v zračni reži; parcialne diferencialne enačbe.

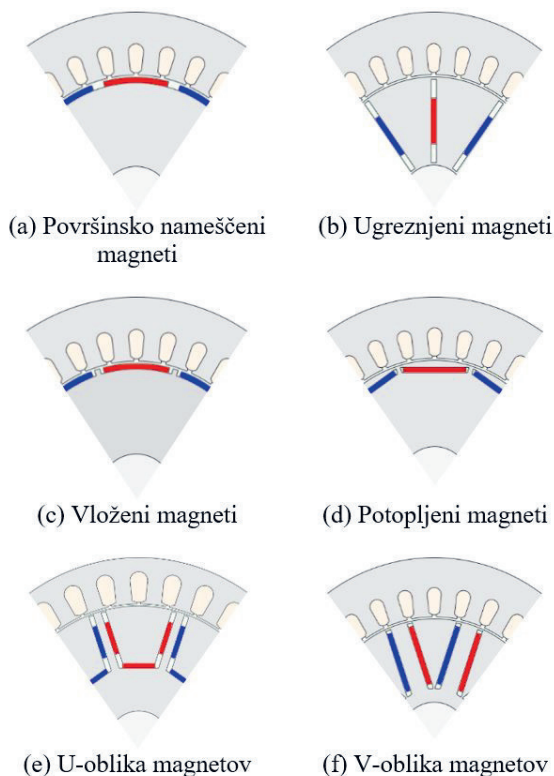
Abstract: The development of permanent magnets with high energy density and their availability on the market affect the increased use of magnets in synchronous motors. The efficiency of the permanent magnet machine is highly influenced by the magnetic field in the air-gap between the rotor and the stator, which is generated by the rotor with its permanent magnets during rotation. The magnetic field in the air gap and in the permanent magnets of the rotor is obtained as the solution of a system of partial differential equations describing the magnetic properties of the machine. This system is not always fully analytically solvable.

Key words: permanent magnet motors; magnetic field in the air gap; partial differential equations.

1. Uvod

Razvoj trajnih (permanentnih) magnetov z visoko gostoto energije in njihova dostopnost na trgu vplivata na povečano uporabo magnetov v sinhronskih motorjih. Sinhronski motorji s trajnimi magneti postajajo vse bolj zanimivi tudi za pogon električnih vozil [1]. Glede na tip rotorske konstrukcije ločimo več vrst motorjev oz. rotorjev s trajnimi magneti. Različne vrste rotorjev prikazuje Slika 1: rotor s površinsko nameščenimi magneti (a), rotor z ugreznjenimi magneti (b), rotor z vložnimi magneti (c) in rotor s potopljenimi oz. notranjimi magneti (d). Posebna primera rotorja s potopljenimi magneti sta rotor z magneti v obliki črke U (e) in rotor z magneti v obliki črke V (f).

Za delovanje motorja s trajnimi magneti je ključnega pomena magnetno polje v zračni reži med rotorjem in statorjem, ki ga rotor s trajnimi magneti pri vrtenju ustvarja. Gostoto magnetnega pretoka v zračni reži (ter v različnih delih rotorja) dobimo kot rešitev sistema parcialnih diferencialnih enačb, ki opisuje dogajanje v motorju. Numerični izračun magnetnega polja v zračni reži zato ponavadi temelji na metodi končnih elementov, analitični izračun pa je velikokrat težje izvedljiv [2]. Ravno analitična oblika magnetnega polja pa je tista, ki omogoča učinkovito in fleksibilno načrtovanje motorjev z izbranim tipom rotorske konstrukcije in željenimi magnetnimi lastnostmi.



Slika 1: Rotorji s trajnimi magneti.

2. Parcialne diferencialne enačbe

Zaradi kompleksnosti analitičnega izračuna gostote magnetnega pretoka v zračni reži in trajnih magnetih privzamemo več predpostavk: (1) dolžina motorja je neskončna in prečni prerez motorja se z dolžino ne spreminja, zaradi česar lahko analizo omejimo na dve dimenziji, (2) le radialna in tangencialna komponenta gostote magnetnega pretoka \mathbf{B} sta neničelni, zaradi česar je neničelna le z komponenta magnetnega vektorskega potenciala \mathbf{A} , (3) trajni magneti imajo linearno demagnetizacijsko karakteristiko in so v smeri magnetizacije polno magnetizirani, (4) železo v statorju in rotorju je neskončno permeančno ter (5) električna prevodnost magnetov je ničelna. Zaradi krožne oblike prečnega prereza motorja matematično analizo dogajanja v motorju običajno izvedemo v polarnem koordinatnem sistemu. Poleg tega, da bi dobili preprostejšo (polarno) obliko pogojev na mejah zračne reže in trajnih magnetov, namesto pravokotnih magnetov v analizi običajno zajamemo ekvivalentne magnetne v obliki polarnih pravokotnikov, tj. izsekov krožnega kolobarja, omejenega z dvema radijema in dvema polarnima kotoma. Izhodišče polarnega koordinatnega sistema O postavimo v središče motorja.

Magnetno polje v zračni reži med rotorjem in statorjem in magnetno polje v trajnih magnetih opišemo s pomočjo magnetnega vektorskega potenciala $\mathbf{A} = (0, 0, A_z)$ ki v zračni reži (in območjih rotorja, napolnjenih z zrakom) zadošča Laplaceovi enačbi $\nabla^2 A_z = 0$ v trajnih magnetih rotorja pa Poissonovi enačbi $\nabla^2 A_z = -\mu_0 (\nabla \times \mathbf{M})_z$ katere oblika je odvisna tudi od izbrane magnetizacije \mathbf{M} trajnih magnetov μ_0 (je permeančnost zraka). V polarnih koordinatah r in θ je Laplaceova parcialna diferencialna enačba oblike

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

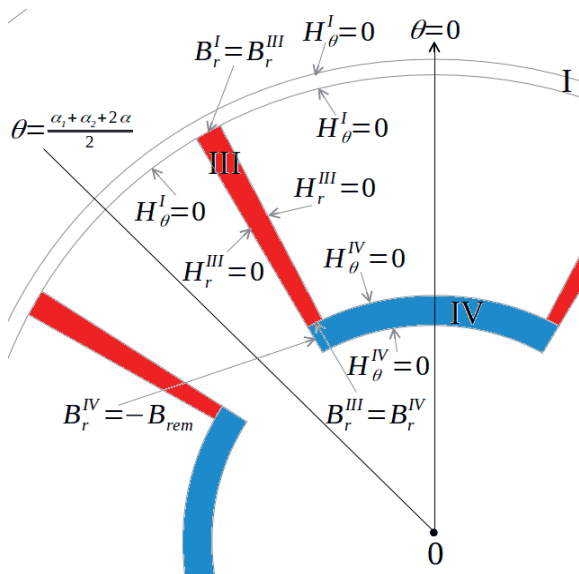
Poissonova parcialna diferencialna enačba pa je oblike

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} = \frac{-\mu_0}{r} \left(M_\theta + r \frac{\partial M_\theta}{\partial r} - \frac{\partial M_r}{\partial \theta} \right) \quad (2)$$

kjer sta M_r in M_θ radialna in tangencialna komponenta vektorja magnetizacije. Obe komponenti gostote magnetnega pretoka \mathbf{B} , ki sta odvisni od radija r in polarnega kota θ , dobimo iz A_z na naslednji način:

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \quad \text{in} \quad B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (3)$$

Ker pa se različna območja motorja stikajo, moramo, če želimo izračunati magnetni potencial v zračni reži ali v izbranem trajnem magnetu, rešiti sistem Laplaceovih in/ali Poissonovih parcialnih diferencialnih enačb, ki opisuje magnetno dogajanje v motorju in je odvisen od načina magnetizacije trajnih magnetov. Rešitev sistema je odvisna tudi od robnih/mejnih pogojev med danimi območji (npr. zračna reža, trajni magneti, železni del statorja, železni del rotorja, gred). Enostavnejšo (najbolje homogeno) obliko robnih in mejnih pogojev med območji dobimo zaradi zamenjave pravokotnih magnetov z ekvivalentnimi magneti v obliki polarnih pravokotnikov in nekaterih prej omenjenih predpostavk. Na primer, pravokotna komponenta gostote magnetnega pretoka \mathbf{B} je na stiku dveh različnih območij zvezna, vzporedna komponenta jakosti magnetnega polja \mathbf{H} pa je ob stiku z območjem iz železa ničelna, pri čemer je $B = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$ in μ_r je permeančnost materiala (permeančnost zraka je enaka 1). Mejne pogoje med območji na primeru rotorja z ugreznjenimi trajnimi magneti prikazuje Slika 2.



Slika 2: Mejni pogoji v rotorju z magneti v obliki črke U.

3. Analitični izračun magnetnega polja

Do rešitve sistema parcialnih diferencialnih enačb, v katerem opisuje vsaka enačba s komponento magnetnega potenciala v odvisnosti od radija r in polarne kota θ v enem izmed območij, pridemo z večkratno uporabo metode separacije spremenljivk. V prvem koraku iskanja rešitve sistema upoštevamo tudi homogene pogoje. Vrednosti nedoločenih koeficientov

v tako dobljenih semi-splošnih rešitvah pa določimo s pomočjo nehomogenih robnih/mejnih pogojev med območji v naslednjem koraku. Ker imajo iskane funkcije v različnih območjih ob konstantnem radiju različne periode, moramo pri izpolnjevanju določenih mejnih pogojev pri nekaterih rotorskih konstrukcijah obe primerjani funkciji na stičnem intervalu predhodno razviti v posplošeni Fourierovi vrsti z ustrežno (obema skupno) periodo. Takemu pogoju bo zadoščeno, ko bodo vsi koeficienti Fourierovih vrst obeh primerjanih funkcij enaki, kar nas pripelje do sistema linearnih enačb za nedoločene koeficiente semi-splošnih rešitev [2].

Pri nekaterih tipih rotorskih konstrukcij (kot je npr. rotor na Sliki 2) dobimo na opisan način sistem z neskončno mnogo linearnimi enačbami z neskončno mnogo neznanimi koeficienti funkcijskih vrst, ki analitično ni rešljiv. V takem primeru lahko funkcijske vrste, s katerimi so podane z komponente magnetnih potencialov, pri izbranem dovolj poznem členu odrežemo, da dobimo sistem s končnim številom linearnih enačb s končnim številom neznanih koeficientov. Ker so posplošene Fourierove vrste, s katerimi izražamo iskane funkcije, na svojem definicijskem območju dobro konvergentne, funkcij z odrezom členov z višjimi frekvencami bistveno ne spremenimo. Rešitev tako odrezanega sistema linearnih enačb, ki jo sestavljajo enolično določene vrednosti koeficientov, določa potem le analitični približek z komponent magnetnih potencialov v zračni reži in v trajnih magnetih. Analitično oceno obeh komponent gostote magnetnega pretoka \mathbf{B} v izbranem območju rotorja dobimo iz zvez (3). Ta približek je zelo dober, kar lahko preverimo tudi z numeričnim izračunom s pomočjo metode končnih elementov (MKE oz. FEM) na poljubno izbranem mestu zračne reže.

4. Zaključek

Analitični izračun porazdelitve gostote magnetnega polja v zračni reži rotorjev omogoča vpogled in razumevanje vpliva geometrijskih parametrov rotorja na učinkovitost motorja s trajnimi magneti. Do danes je bilo razvitih in objavljenih več popolnoma analitičnih izračunov za različne rotorje s površinsko nameščenimi in površinsko vloženimi trajnimi magneti, ki vsi temeljijo na 2D modelu [3,4]. Nedavno so bile analitične rešitve objavljene tudi že za primere rotorjev z ugreznjenimi trajnimi magneti [2,5]. Problem pa je veliko težji za rotorje s potopljenimi magneti, saj tvorijo trajni magneti različne oblike, ki jih s polarnima koordinatama ni mogoče enostavno opisati, pa tudi sistem parcialnih diferencialnih enačb je zaradi večjega števila območij kompleksnejši.

Literatura

1. Miljavec, D.; Hajdinjak, M. Integrated modular distributed drivetrain for electric & hybrid vehicles : DRIVEMODE. V: *Zbornik, Posvet o električnih strojih ob 90-letnici prof. dr. Petra Jereba, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 12. 4. 2018*, C1-3.
2. Hajdinjak, M.; Mavrič, M. Analitičen izračun magnetnega polja v zračni reži stroja s trajnimi magneti. V: *Zbornik, Posvet o električnih strojih ob 90-letnici prof. dr. Petra Jereba, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 12. 4. 2018*, A1-7.
3. Zhu, Z. Q. ; Howe, D.; Bolte, E.; Ackermann, B. Instantaneous Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent Magnet DC Motors, Part I: Open-Circuit Field, *IEEE Trans. Magn.*, 1993, vol. 29, no. 1, 124- 135.
4. Boroujeni, S. T.; Naghneh, H. B. Analytical modelling and prototyping a slotless surface-inset PM machine, *IET Electr. Power App.*, 2017, vol. 11, no. 3, 312–322.
5. Pourahmadi-Nakhli, M.; Rahideh, A.; Mardaneh, M. Analytical 2-D Model of Slotted Brushless Machines With Cubic Spoke-Type Permanent Magnets, *IEEE Trans. Energy Conver.*, 2018, vol. 33, no. 1, 373–382.