

# Meje stabilnosti vibracij pri struženju

## *Stability boundaries of chatter vibrations in turning*

**Rudolf Pušenjak**

redni profesor, Fakulteta za industrijski inženiring Novo mesto, Šegova ulica 112, 8000 Novo mesto, Slovenija

**Povzetek:** V članku je obravnavan model samovzbujenih vibracij v procesu struženja z eno prostostno stopnjo, ki sestoji iz regulacijske strukture z direktno vejo, primarno povratno zvezo in regenerativno povratno zvezo. Direktna veja služi za modeliranje dinamike procesa odrezovanja in strukturne dinamike. Regenerativna povratna zveza služi za modeliranje časovne zakasnitve, ki v procesu odrezovanja nastaja zaradi vrtenja obdelovanca. Vibracije pri struženju nastanejo, ko postane regulacijska struktura nestabilna in neugodno vplivajo na kvaliteto procesa odrezovanja (groba površina in slaba dimenzijska natančnost obdelovanca). Prav tako pa povzročajo hitro obrabo rezalnega orodja in celo možno poškodbo stružnice. V prispevku je izpeljana vodilna diferencialna enačba vibracij v procesu struženja, ki jo rešujemo z novo metodo koračnega harmonskega ravnovesja (MKHR). S pomočjo te metode konstruiramo stabilnostni diagram procesa struženja, ki z določitvijo stabilnih področij zagotavlja optimalne pogoje struženja pri spremenljivi hitrosti vretena.

**Ključne besede:** struženje; proces odrezovanja; regenerativni model; koračna metoda harmonskega ravnovesja, stabilnostni diagram.

**Abstract:** The paper treats a model of self-excited vibrations in the turning process with one degree of freedom by applying the control structure, which consists of the forward branch, primary feedback and the regenerative feedback. The dynamics of cutting process and the structural dynamics are modeled in the forward branch of the control structure. The time delay, which is an inherent phenomenon of the cutting process and occurs due to the workpiece revolutions is modeled in the regenerative feedback. Vibrations in turning emanate, when the control structure becomes unstable and adversely affect the quality of the cutting process with rough surface and poor dimension accuracy. Vibrations can cause a rapid deterioration of the cutting tool and the possible damage of the lathe. In the paper, the governing delayed differential equation of vibrations in turning process is derived, which is solved by the novel incremental harmonic balance method (IHB method). By means of the proposed method, the stability chart of the turning process is constructed, which in stable areas ensures optimal conditions of turning at variable spindle speed.

**Keywords:** turning; cutting process; regenerative model; incremental harmonic balance method; stability chart.

## 1. Uvod

Vibracije pri struženju so značilni pojav samovzbujenih nihanj, ki nastajajo zaradi majhnih motenj rezalne sile kot dodatne komponente, ki je suponorirana k ustaljeni rezalni sili. Do dodatne motilne komponente rezalne sile lahko prihaja zaradi prelomov ostružkov, motenj, ki jih povzročajo neprekinjeni ostružki ali zaradi mest na obdelovancu, kjer se pojavlja večja trdota. Te motnje povzročajo spreminjanje relativnih pomikov med rezalnim orodjem in obdelovancem, zaradi česar se spreminjajo vrednosti rezalnih parametrov, na primer debelina ostružka. Ker se obdelovanec med struženjem vrti, nastane ob vsakem vrtljaju določena časovna zakasnitev, s katero spremenjeni rezalni parametri regenerativno vplivajo na velikost rezultirajoče rezalne sile. To pomeni, da smemo interakcijo med dinamiko procesa odrezovanja in mehansko strukturo rezalnega orodja in obdelovanca obravnavati kot zaprto zankni sistem. Vibracije pri struženju nastanejo tedaj, ko postane ta zaprto zankni sistem nestabilen. Te vibracije predstavljajo eno izmed najpomembnejših omejitev produktivnosti pri struženju. Njihov neugodni vpliv se odraža v slabši kvaliteti obdelave površine, manjši dimenzijski natančnosti obdelovanca, hitrejši obrabi orodja, možnem lomu rezalnega orodja in celo resnejši poškodbi stružnice. Na osnovi zaprto zanke strukture proizvodnega sistema bomo vibracije pri struženju v tem članku obravnavali kot problem stabilnosti, katerega rešitev iščemo v obliki stabilnostnega diagrama. V stabilnostnem diagramu bomo ločili stabilna področja procesa odrezovanja od nestabilnih področij v odvisnosti od spremenljive vrtilne hitrosti vretena tako, da bomo določili stabilnostne meje. Optimalne pogoje pri struženju bomo zagotovili s tem, da bomo izbrali takšne parametre sistema, pri katerih so samovzbujene vibracije v odvisnosti od vrtilne hitrosti vretena v enem od stabilnih področij.

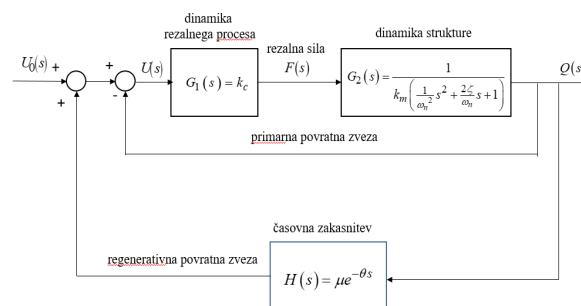
Številne raziskave problema stabilnosti vibracij pri struženju segajo do sredine šestdesetih let prejšnjega stoletja. Leta 1965 je Tobias s sodelavci razvil grafično metodo konstrukcije diagrama stabilnosti [1] na osnovi posebnega izraza za proces odrezovanja. Leta 1990 je Minis model vibracij pri struženju lineariziral v okolici ravnotežne točke oziroma pri ustaljenih pogojih odrezovanja in ga opisal v matematični obliki z linearno vektorsko-matrično diferencialno enačbo stanja s časovnimi zakasnitvami [2]. Na osnovi Minisove enačbe stanja in Merritovega dela [3] je Chen s sodelavci v referenci [4] predstavil izboljšan algoritem reševanja enačbe stanja. Sodobnejši pristop z uporabo Padejeve aproksimacije za racionalizacijo prenosne funkcije zakasnilnega člena v regulacijski strukturi je leta 2016 predstavil Beudaert s sodelavci [5].

Za reševanje problema stabilnosti vibracij pri struženju je v tem članku predstavljena izvirna varianta metode koračnega harmonskega ravnovesja (MKHR). Novost metode v primerjavi z njeno predhodno različico [6] je v tem, da omogoča obravnavo periodičnih nihanj s časovnimi zakasnitvami, kar je v primeru vibracij pri struženju nujno potrebno. V tem članku bomo za opis vibracij izpeljali vodilno diferencialno enačbo z

zakasnitvami na osnovi lineariziranega modela v bližnji okolici ravnotežne točke, kar ustreza obravnavi motenj okrog ustaljenega stanja, to je stanja, določenega z ustaljenimi pogoji rezalnega procesa. Izpeljana vodilna diferencialna enačba z zakasnitvami je linearna, zaradi česar lahko rezultate, dobljene z MKHR, potrdimo z analitičnimi sredstvi.

## 2. Model vibracij pri struženju z eno prostostno stopnjo

Najenostavnejši model vibracij z eno prostostno stopnjo je predlagal Merrit [3]. Model sestoji iz primarne povratne zveze in dodatne regenerativne povratne zveze, v kateri se nahaja blok za tvorbo časovne zakasnitve. Celotna regulacijska struktura je prikazana na sliki 1 v slikovni domeni, to je s pomočjo Laplaceovih transformirank vhodnih in izhodnih signalov posameznih blokov ter pripadajočih prenosnih funkcij.



Slika 1. Zaprtozankni model vibracij pri struženju s poenostavljeno dinamiko rezalnega procesa.

Dinamika rezalnega procesa in dinamika strukture sta modelirani v direktni veji regulacijske strukture. Dinamika rezalnega procesa je močno poenostavljena, saj predvideva, da je rezalna sila proporcionalna signalu pogreška. Iz slike 1 razberemo, da velja  $U(s) = U_0(s) - [1 - H(s)]Q(s)$ , kjer je  $U(s)$  Laplaceova transformiranka signala pogreška,  $U_0(s)$  je Laplaceova transformiranka referenčnega pomika,  $Q(s)$  je Laplaceova transformiranka rezultirajočih relativnih pomikov na izhodu sistema,  $H(s)$  pa je prenosna funkcija zakasnilnega člena v regenerativni povratni zvezi. Argument  $s$  je kompleksna spremenljivka Laplaceove transformacije,  $s = \sigma + i\omega$ , ( $i = \sqrt{-1}$ ), kjer je  $\sigma$  njen realni,  $\omega$  pa njen imaginarni del. V skladu s predpostavljeno odvisnostjo rezalne sile od signala pogreška modeliramo dinamiko rezalnega procesa v obliki proporcionalnega člena (P člena) s prenosno funkcijo  $G_1(s) = k_c$ , kjer je  $k_c$  rezalna togost. Dinamika strukture je opisana s prenosno funkcijo člena drugega reda (PT<sub>2</sub> člena):

$$G_2(s) = \frac{1}{k_m \left( \frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1 \right)}, \quad (1)$$

kjer  $k_m$  označuje strukturno togost,  $\omega_n$  pomeni naravno krožno frekvenco,  $\zeta$  pa označuje strukturni faktor dušenja. Prenosna funkcija zakasnilnega člena je:

$$H(s) = \mu e^{-\theta s} \quad (2)$$

kjer je  $\mu$  faktor prekrivanja,  $\theta$  pa časovna zakasnitev, ki ustreza času, potrebnim za polni zasuk vretena okrog svoje osi (to je za zasuk  $360^\circ$ ). Za direktno vejo lahko napišemo vhodno-izhodno povezavo:

$$Q(s) = G_1(s)G_2(s)U(s) = G_1(s)G_2(s)U_0(s) - G_1(s)G_2(s)[1-H(s)]Q(s) \quad (3)$$

v kateri lahko brez škode za splošnost vzamemo, da je referenčni pomik enak nič in s tem  $U_0(s) \equiv 0$ . Z vstavljanjem prenosnih funkcij dobimo enačbo:

$$Q(s)[1+G_1(s)G_2(s)[1-H(s)]] = Q(s)\left[1 + \frac{k_c \omega_n^2}{k_m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}(1 - \mu e^{-\theta s})\right] = G_1(s)G_2(s)U_0(s) \equiv 0 \quad (4)$$

Če uvedemo razmernik togosti  $\kappa = k_c/k_m$ , ki lahko zavzame samo pozitivne realne vrednosti, lahko enačbo (4) prepišemo na obliko:

$$Q(s)\left[s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(1+\kappa) - \mu\kappa\omega_n^2 e^{-\theta s}\right] = 0 \quad (5)$$

nato pa s pomočjo inverznih Laplaceovih transformacij:

$$L^{-1}[Q(s)] = q(t), \quad L^{-1}[sQ(s)] = \frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad L^{-1}[s^2Q(s)] = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}, \quad L^{-1}[e^{-\theta s}Q(s)] = q(t-\theta) \quad (6)$$

v katerih lahko na osnovi predpostavke  $U_0(s) \equiv 0$  privzamemo, da so tudi začetni pogoji rezultirajočih relativnih pomikov na izhodu sistema enaki nič:

$q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0$ , izpeljemo vodilno diferencialno enačbo vibracij pri struženju z zakasnitvami:

$$\ddot{q} + 2\zeta\omega_n \dot{q} + \omega_n^2(1+\kappa)q(t) - \mu\kappa\omega_n^2 q(t-\theta) = 0 \quad (7)$$

Dobljena diferencialna enačba je navadna linearna diferencialna enačba drugega reda s časovno zakasnitvijo. Dejstvo, da je enačba linearna, lahko izkoristimo za iskanje rešitev v analitični obliki.

### 3. Metoda koračnega harmonskega ravnovesja v problemu stabilnosti vibracij pri struženju

Metoda koračnega harmonskega ravnovesja (MKHR) je metoda, ki se v splošnem uporablja za iskanje ustaljenih periodičnih in skoraj periodičnih rešitev nelinearnih sistemov z več prostostnimi stopnjami [6]. Če se omejimo samo na iskanje ustaljenih periodičnih rešitev, je očitno, da z dobljeno periodično rešitvijo dobimo rešitev, ki natanko ustreza neki točki na posamezni meji diagrama stabilnosti. Če rešitev ni periodična, temveč neomejeno narašča, predstavlja neko rešitev, ki leži v nestabilnem področju. Če se po drugi strani rešitev s časom neprestano zmanjšuje proti nič, predstavlja tako imenovano asimptotično stabilno rešitev in potemtakem leži v stabilnem področju. MKHR ima vse potrebne lastnosti za izračun periodičnih rešitev na

meji med stabilnim in nestabilnim območjem in jo je mogoče modificirati tako, da nam neposredno izračuna posamezne točke, ki ležijo na mejah stabilnostnega diagrama, kar predstavlja cilj, ki ga želimo doseči v tem članku.

V predlagani MKHR najprej uvedemo novo, brezdimenzijsko časovno spremenljivko  $\tau = \omega t$ . To ima za posledico, da moramo namesto časovne zakasnitve  $\theta$  uporabiti brezdimenzijsko zakasnitev  $\omega\theta$ . Z uvedbo nove časovne spremenljivke pa moramo zamenjati tudi običajna časovna odvoda rezultirajočih relativnih pomikov z diferencialnima operatorjema:

$$\left(\ddot{\cdot}\right) = \frac{d^2}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}, \quad \left(\dot{\cdot}\right) = \frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau} \quad (8)$$

s čemer diferencialna enačba (7) preide na parcialno diferencialno enačbo z zakasnitvijo:

$$\omega^2 \frac{d^2 q}{d\tau^2} + 2\zeta\omega_n \omega \frac{dq}{d\tau} + \omega_n^2(1+\kappa)q(\tau) - \mu\kappa\omega_n^2 q(\tau - \omega\theta) = 0 \quad (9)$$

ki je primerne oblike za reševanje z MKHR. Prvi korak pri implementaciji MKHR je uporaba Newton-Raphsonovega iterativnega postopka, ki ga moramo tudi zares izvesti v primeru, da imamo opravka z nelinearnimi diferencialnimi enačbami. V Newton-Raphsonovem iterativnem postopku izhajamo iz nekega začetnega (ali poskusnega) stanja  $q(\tau)$ ,  $q_\theta = q(\tau - \omega\theta)$ ,  $\omega$ ,  $\theta$ ,  $\kappa$  da bi z dodajanjem prirastkov  $\Delta q(\tau)$ ,  $\Delta q_\theta = \Delta q(\tau - \omega\theta)$ ,  $\Delta\omega$ ,  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\kappa$  izračunali novo stanje:

$$\begin{aligned} q^{nov} &= q + \Delta q, \\ q_\theta^{nov} &= q_\theta + \Delta q_\theta, \\ \omega^{nov} &= \omega + \Delta\omega, \\ \theta^{nov} &= \theta + \Delta\theta, \\ \kappa^{nov} &= \kappa + \Delta\kappa \end{aligned} \quad (10)$$

Ker iščemo ustaljeno periodično rešitev, v splošnem izberemo nastavek v obliki Fourierjeve vrste, ki teoretično vsebuje neskončno mnogo členov. Zaradi omejitev, ki jih določa zmogljivost računalnika (razpoložljivi prostor v pomnilniku, omejitve časa računanja, itd.), v praksi uporabljamo okrnjeno Fourierjevo vrsto s končnim, vendar dovolj velikim številom členov. Problem vibracij pri struženju, opisan z enačbo (9) pa je zaradi linearnosti in homogenosti enačbe (9) poseben in za rešitev zadostuje en sam harmonični člen. (Poskus, da bi v Fourierjevi vrsti uporabili večje število členov se konča z enako rešitvijo kot z uporabo enega samega člana, pri čemer so vsi Fourierjevi koeficienti, ki so višjega reda kot je koeficient osnovnega harmonika, enaki nič). Periodično rešitev enačbe (9) potemtakem izrazimo v obliki:

$$\begin{aligned} q(\tau) &= a_1 \cos \tau + b_1 \sin \tau = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{T} = [\cos \tau, \sin \tau], \quad \mathbf{a} = \{a_1, b_1\}^T, \\ \Delta q(\tau) &= \Delta a_1 \cos \tau + \Delta b_1 \sin \tau = \mathbf{T} \cdot \Delta \mathbf{a}, \quad \Delta \mathbf{a} = \{\Delta a_1, \Delta b_1\}^T, \end{aligned} \quad (11.a,b)$$

kjer okrnjeno Fourierjevo vrsto (v danem primeru z vrsto, ki vsebuje en sam harmonik) predstavimo s skalarnim matričnim produktom, kjer je  $\mathbf{T}$  matrika harmoničnih funkcij, ki ustrezajo posameznim harmonikom vrste,  $\mathbf{a}$  je stolpni vektor Fourierjevih koeficientov,  $\Delta \mathbf{a}$  pa stolpni vektor prirastkov Fourierjevih koeficientov v Newton-Raphsonovem iterativnem postopku, z zgornjim indeksom  $\top$  pa označimo transpozicijo vektorja oziroma matrike. Ključna novost MKHR za sisteme z zakasnitvami v primerjavi s tradicionalno metodo [6] je, da lahko izrazimo zakasnjeno ustaljeno periodično rešitev s pomočjo transformacije:

$$\begin{aligned} q(\tau - \omega\theta) &= a_1 \cos(\tau - \omega\theta) + b_1 \sin(\tau - \omega\theta) \\ &= a_1 [\cos \tau \cos(\omega\theta) + \sin \tau \sin(\omega\theta)] + b_1 [-\cos \tau \sin(\omega\theta) + \sin \tau \cos(\omega\theta)] = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Theta}[\omega] \cdot \mathbf{a}, \\ \Delta q(\tau - \omega\theta) &= \Delta a_1 \cos(\tau - \omega\theta) + \Delta b_1 \sin(\tau - \omega\theta) \\ &= \Delta a_1 [\cos \tau \cos(\omega\theta) + \sin \tau \sin(\omega\theta)] + \Delta b_1 [-\cos \tau \sin(\omega\theta) + \sin \tau \cos(\omega\theta)] = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Theta}[\omega] \cdot \Delta \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (12.a,b)$$

kjer je

$$\boldsymbol{\Theta}(\omega) = \begin{bmatrix} \cos(\omega\theta) & -\sin(\omega\theta) \\ \sin(\omega\theta) & \cos(\omega\theta) \end{bmatrix} \quad (13)$$

transformacijska matrika. Z odvajanjem enačb (12.a,b) na brezdimenzijsko časovno spremenljivko  $\tau$  lahko izrazimo oba odvoda, ki nastopata v enačbi (9):

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{d\mathbf{T}}{d\tau} \cdot \boldsymbol{\Theta}[\omega] \cdot \mathbf{a}, \quad \frac{d^2q}{d\tau^2} = \frac{d^2\mathbf{T}}{d\tau^2} \cdot \boldsymbol{\Theta}[\omega] \cdot \mathbf{a} \quad (14)$$

s čemer je pripravljeno vse, kar potrebujemo v izvedbi drugega koraka MKHR, to je Galerkinovega postopka. V Galerkinovem postopku uvrstimo enačbe (12.a,b) in (14) v enačbo (9), ločimo izraze v prirastkih od izrazov z začetno rešitvijo tako, da obdržimo samo izraze prvega reda v prirastkih, izraze v prirastkih vektorja Fourierjevih koeficientov  $\Delta \mathbf{a}$  obdržimo na levi strani enačbe, vse druge izraze pa prenesemo na njeno desno stran. Nato obe strani premultipliciramo z variacijo rešitve v matrični obliki  $\delta q = (\delta(\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}))^\top = (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{a})^\top = \delta \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{T}^\top$  in nazadnje še na obeh straneh integriramo na spremenljivko  $\tau$  v mejah od 0 do  $2\pi$ . S tem dobimo variacijsko enačbo:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{T}^\top \left[ \omega^2 \frac{d^2\mathbf{T}}{d\tau^2} + 2\zeta\omega_n\omega \frac{d\mathbf{T}}{d\tau} + \omega_n^2(1+\kappa)\mathbf{T} - \mu\kappa\omega_n^2\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Theta}(\omega) \right] d\tau \cdot \Delta \mathbf{a} = \\ &-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{T}^\top \left[ \omega^2 \frac{d^2\mathbf{T}}{d\tau^2} + 2\zeta\omega_n\omega \frac{d\mathbf{T}}{d\tau} + \omega_n^2(1+\kappa)\mathbf{T} - \mu\kappa\omega_n^2\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Theta}(\omega) \right] d\tau \cdot \mathbf{a} \\ &-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{T}^\top \left[ 2\omega \frac{d^2\mathbf{T}}{d\tau^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\mathbf{T}}{d\tau} - \mu\kappa\omega_n^2\mathbf{T} \cdot \frac{d\boldsymbol{\Theta}(\omega)}{d\omega} \right] d\tau \cdot \mathbf{a} \Delta \omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{T}^\top \left[ \mu\kappa\omega_n^2\mathbf{T} \cdot \frac{d\boldsymbol{\Theta}(\omega)}{d\theta} \right] d\tau \cdot \mathbf{a} \Delta \theta \\ &-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{T}^\top \omega_n^2 \left[ \mathbf{T} - \mu\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Theta}(\omega) \right] d\tau \cdot \mathbf{a} \Delta \kappa \end{aligned} \quad (15)$$

Ker je variacija vektorja Fourierjevih koeficientov  $\delta \mathbf{a}^\top$  poljubna, smemo variacijsko enačbo (15) s tem vektorjem okrajšati, s čemer dobimo linearno matrično algebrsko enačbo za neznan vektor prirastkov Fourierjevih koeficientov  $\Delta \mathbf{a}$ :

$$\mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{a} = \mathbf{R} - \mathbf{U} \Delta \omega - \mathbf{V} \Delta \theta - \mathbf{W} \Delta \kappa \quad (16)$$

kjer je

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^\top \left[ \omega^2 \frac{d^2\mathbf{T}}{d\tau^2} + 2\zeta\omega_n\omega \frac{d\mathbf{T}}{d\tau} + \omega_n^2(1+\kappa)\mathbf{T} - \mu\kappa\omega_n^2\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Theta}(\omega) \right] d\tau \quad (17)$$

tangentna matrika,

$$\mathbf{R} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^\top \left[ \omega^2 \frac{d^2\mathbf{T}}{d\tau^2} + 2\zeta\omega_n\omega \frac{d\mathbf{T}}{d\tau} + \omega_n^2(1+\kappa)\mathbf{T} - \mu\kappa\omega_n^2\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Theta}(\omega) \right] d\tau \cdot \mathbf{a} \quad (18)$$

je vektor ostankov (rezidualni vektor),  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  in  $\mathbf{W}$  pa so gradientni vektorji:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^\top \left[ 2\omega \frac{d^2\mathbf{T}}{d\tau^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\mathbf{T}}{d\tau} - \mu\kappa\omega_n^2\mathbf{T} \cdot \frac{d\boldsymbol{\Theta}(\omega)}{d\omega} \right] d\tau \cdot \mathbf{a} \quad (19)$$

$$\mathbf{V} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^\top \left[ \mu\kappa\omega_n^2\mathbf{T} \cdot \frac{d\boldsymbol{\Theta}(\omega)}{d\theta} \right] d\tau \cdot \mathbf{a} \quad (20)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^\top \omega_n^2 \left[ \mathbf{T} - \mu\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Theta}(\omega) \right] d\tau \cdot \mathbf{a} \quad (21)$$

Z enačbami (16)-(21) je problem vibracij pri struženju z uporabo MKHR popolnoma opisan. Če predpostavimo, da iščemo rešitev enačbe (16) pri fiksnih vrednostih parametrov  $\omega$ ,  $\theta$  in  $\kappa$ , so pripadajoči inkrementi  $\Delta \omega$ ,  $\Delta \theta$  in  $\Delta \kappa$  enaki nič, tako da dobimo eksaktno rešitev enačbe tedaj, ko je vektor ostankov enak nič,  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ . V MKHR je na splošno to redek primer in se zato zadovoljimo s tem, da postane norma vektorja  $\mathbf{R}$  v Newton-Raphsonovem iterativnem postopku dovolj majhna,  $|\mathbf{R}| \leq tol$ , kjer  $tol$  pomeni predpisano toleranco. Problem vibracij pri struženju je eden tistih redkih primerov, v katerem lahko dobimo analitično rešitev enačbe  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ .

Iz enačbe (18) sledi, da lahko enačbo  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  rešimo s poljubnim vektorjem  $\mathbf{a}$  (kar pomeni, da je pri nekem vektorju  $\mathbf{a}$ , s katerim enačbo  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  rešimo, rešitev enačbe tudi vsak vektor  $c\mathbf{a}$ , kjer je  $c$  poljuben skalar). V problemu vibracij pri struženju zato ne iščemo vrednosti Fourierjevih koeficientov, temveč iščemo zvezo med krožno frekvenco  $\omega$  vibracij, določeno z vrtilno hitrostjo vretena in parametri procesa  $\omega_n$ ,  $\zeta$ ,  $\mu$  in  $\kappa$ . To zvezo dobimo, če nakazano integracijo v enačbi (18) izvršimo in rezultat izenačimo z vektorjem  $\mathbf{0}$ . S tem dobimo enačbi za obe komponenti vektorja  $\mathbf{a}$ :

$$\begin{aligned} a_1 \left\{ \omega^2 - \omega_n^2 [1 + \kappa - \mu\kappa \cos(\omega\theta)] \right\} - b_1 \omega_n [2\zeta\omega + \mu\kappa\omega_n \sin(\omega\theta)] &= 0, \\ b_1 \left\{ \omega^2 - \omega_n^2 [1 + \kappa - \mu\kappa \cos(\omega\theta)] \right\} + a_1 \omega_n [2\zeta\omega + \mu\kappa\omega_n \sin(\omega\theta)] &= 0 \end{aligned} \quad (22.a,b)$$

Če enačbo (22.a) množimo z  $a_1$ , enačbo (22.b) pa z  $b_1$  in nato enačbi seštejemo in če po drugi strani od enačbe (22.b), pomnožene z  $a_1$  odštejemo enačbo, pomnoženo z  $b_1$ , dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} (a_1^2 + b_1^2) \left\{ \omega^2 - \omega_n^2 [1 + \kappa - \mu \kappa \cos(\omega\theta)] \right\} &= 0, \\ (a_1^2 + b_1^2) \omega_n [2\zeta\omega + \mu\kappa\omega_n \sin(\omega\theta)] &= 0 \end{aligned} \quad (23.a,b)$$

Iz enačb (23.a,b) se najprej lahko prepričamo, da je trivialna rešitev  $a_i = b_i = 0$  vselej možna, ker pa pomeni, da se vibracije niso razvile, nas nadalje ne zanima več. Pri vsaki netrivialni rešitvi pa je  $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ , zato smemo enačbi (23.a,b) s faktorjem  $a_1^2 + b_1^2$  okrajšati, s čemer dobimo:

$$\begin{aligned} \mu\kappa\omega_n^2 \cos(\omega\theta) &= \omega_n^2 (1 + \kappa) - \omega^2, \\ \mu\kappa\omega_n^2 \sin(\omega\theta) &= -2\zeta\omega_n\omega \end{aligned} \quad (24.a,b)$$

Iz enačb (24.a,b) lahko obe trigonometrični funkciji eliminiramo, če enačbi na obeh straneh kvadriramo in seštejemo, s čemer dobimo bikvadratno enačbo:

$$[\omega_n^2(1+\kappa) - \omega^2]^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2 - \mu^2\kappa^2\omega_n^4 = 0, \Rightarrow \omega^4 + 2\omega^2\omega_n^2[2\zeta^2 - (1+\kappa)] + \omega_n^4[(1+\kappa)^2 - \mu^2\kappa^2] = 0 \quad (25)$$

ki jo razrešimo na krožno frekvenco vibracij pri struženju  $\omega$ , pri čemer dobimo štiri korene:

$$\omega_{1,2,3,4} = \pm \omega_n \sqrt{1 + \kappa - 2\zeta^2 \mp \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2(1 + \kappa) + \mu^2\kappa^2}} \quad (26)$$

Dobljeni koreni bikvadratne enačbe predstavljajo rešitev problema vibracij pri struženju z uporabo MKHR v analitični obliki. V splošnem so ti koreni lahko kompleksni, vendar nas zanimajo samo realni koreni, ki jih dobimo tedaj, ko je izpolnjen pogoj:

$$1 + \kappa - 2\zeta^2 \mp \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2(1 + \kappa) + \mu^2\kappa^2} \geq 0 \quad (27)$$

Med realnimi koreni lahko nastopita dva dvojna korena, če sta hkrati izpolnjena pogoja:

$$\begin{aligned} 4\zeta^4 - 4\zeta^2(1 + \kappa) + \mu^2\kappa^2 &= 0, \\ \kappa &\geq 2\zeta^2 - 1. \end{aligned} \quad (28.a,b)$$

#### 4. Konstrukcija stabilnostnega diagrama

V konstrukciji stabilnostnega diagrama lahko na osnovi enačbe (26) za vsako podano vrednost razmernika togosti  $\kappa$  izračunamo krožno frekvenco  $\omega$  vibracij pri struženju. Običajno pa v stabilnostnem diagramu prikazujemo meje stabilnosti v odvisnosti od vrtilne hitrosti vretena  $n=1/\theta$  in ne v odvisnosti od krožne frekvence  $\omega$ . Vrtilna hitrost vretena je s krožno frekvenco  $\omega$  povezana, pri čemer lahko neomejeni interval krožne frekvence  $-\infty < \omega < +\infty$  povzroča težave. Da bi se tem težavam izognili, uvedemo pomožno spremenljivko  $v$  z enačbo:

$$\omega\theta = 2\pi(m + v), \quad (29)$$

kjer je  $m$  neko nenegativno celo število, ki ga bomo določili v nadaljevanju, spremenljivka  $v$  pa je definirana na omejenem intervalu  $0 \leq v < 1$  v skladu z lastnostjo, da prihajata za izračun v poštev samo pozitivna korena  $\omega_{1,2}$  enačbe (26). Če sta korena  $\omega_{1,2}$  urejena po velikosti, lahko vpeljemo funkcijo:

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \arctan \left[ \frac{-2\zeta\omega_n\omega_i}{(1 + \kappa)\omega_n^2 - \omega_i^2} \right], \quad (i = 1, 2) \quad (30)$$

kjer uporabimo le glavne vrednosti funkcije arctan. Pri korenu  $\omega_1$  z manjšo vrednostjo vzamemo  $v = u_1$  in vrtilno hitrost vretena izračunamo po formuli:

$$n_1 = \frac{1}{\theta_1} = \frac{\omega_1}{2\pi(m + v)} \quad (31)$$

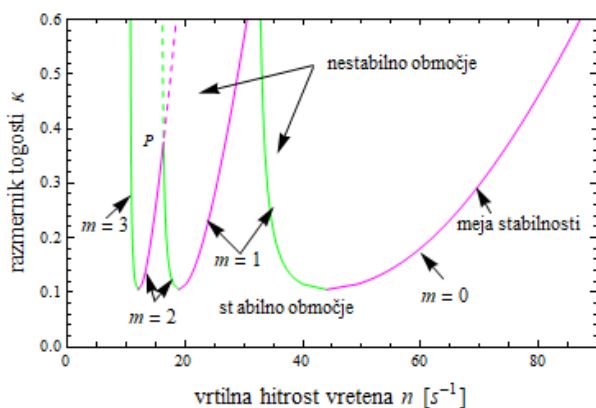
kjer je  $m=1,2,3,\dots$ . Pri korenu  $\omega_2$  z večjo vrednostjo je pomožna spremenljivka  $v$  definirana z relacijo  $v = u_2 + 1/2$ , s pomočjo katere izračunamo vrtilno hitrost vretena z enačbo:

$$n_2 = \frac{1}{\theta_2} = \frac{\omega_2}{2\pi(m + v)} = \frac{\omega_2}{2\pi(m + u_2 + 1/2)}, \quad (32)$$

kjer je  $m=0,1,2,\dots$

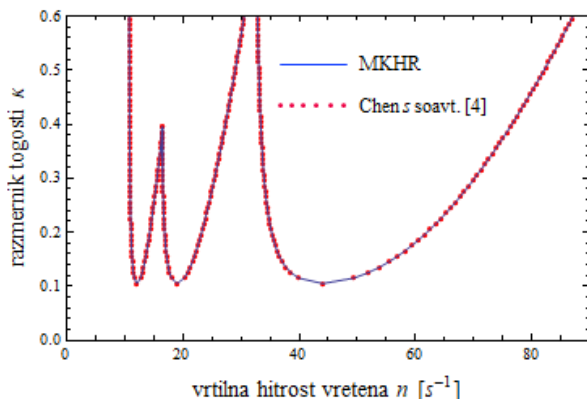
Z uporabo enačb (31), (32) konstruiramo stabilnostni diagram, ki ga prikazuje slika 2. Na tej sliki je konstrukcija diagrama izvedena ob povečevanju razmernika togosti  $\kappa$  od vrednosti 0.105 do vrednosti  $\kappa = 0.6$  s korakom  $\Delta\kappa = 0.01$  in ustrezno izbiro celih števil  $m$ . Naravna krožna frekvenca v obravnavanem zgledu je  $\omega_n = 200 \text{ s}^{-1}$ , faktor strukturnega dušenja je  $\zeta = 0.05$ , faktor prekrivanja pa je izbran tako, da zavzame vrednost  $\mu = 1$ . Pri  $\mu = 1$  predstavlja  $\kappa = 0.105$  najmanjšo vrednost, pod katero ne eksistirajo realne rešitve enačbe (26). To vrednost dobimo z razrešitvijo enačbe 28.a na parameter  $\kappa$ . Meje stabilnosti, ki so izračunane z uporabo enačb (31) in (32), pripadajo različnim vrednostim indeksa  $m$  in se razlikujejo v barvi zaradi boljše prepoznavnosti. Tako so v zeleni barvi prikazane meje stabilnosti, določene z enačbo (31), v rožnati barvi pa stabilnostne meje, izračunane po enačbi (32). Del meje stabilnosti, ki po enačbi (31) pripada indeksu  $m=1$  skupaj z delom meje stabilnosti, ki po enačbi (32) pripada indeksu  $m=0$  leži v območju najvišjih vrtilnih hitrosti vretena, z rastočima indeksoma  $m$  pa se stabilnostne meje bolj in bolj pomikajo k nizkim vrtilnim hitrostim. Hkrati se območja nestabilnosti vse bolj ožijo, zaradi česar v praksi najvišjo

vrednost indeksa  $m$  močno omejimo. V prikazanem diagramu indeks  $m$  zavzame najvišjo vrednost  $m=3$ . Pod mejo stabilnosti se nahaja stabilno območje, nad mejo stabilnosti pa nestabilno območje. V diagramu na sliki 2 vidimo, da se lahko dve meji stabilnosti v neki točki sekata. Nad presečiščem poteka meja stabilnosti, ki je določena z enačbo (31) in je na sliki 2 prikazana s črtkano črto v zeleni barvi, znotraj nestabilnega območja, ki ga določa enačba (32). Velja pa tudi obratno: meja stabilnosti, ki je določena z enačbo (32) in je prikazana s črtkano črto rožnate barve, poteka v notranjosti nestabilnega območja, ki ga določa enačba (31). S črtkanima mejama stabilnosti je nakazano, da je območje nad točko  $P$  v celoti nestabilno.



Slika 2. Diagram stabilnosti samovzbujenih vibracij pri struženju v modelu z eno prostostno stopnjo.

Prikazani diagram stabilnosti na sliki 2 se popolnoma ujema z diagramom stabilnosti v [4], ki je konstruiran na osnovi linearne diferencialne enačbe stanja in rešitve pripadajoče transcendentalne karakteristične enačbe. Primerjavo diagrama stabilnosti z uporabo predložene MKHR in diagrama stabilnosti po metodi reševanja karakteristične enačbe v [4], prikazuje slika 3.

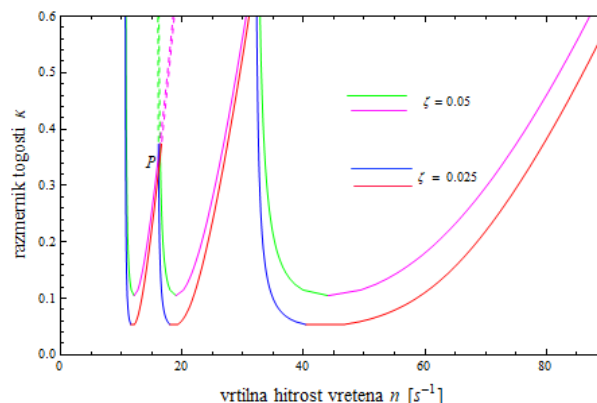


Slika 3. Primerjava diagrama stabilnosti v konstrukciji z MKHR in z rešitvijo transcendentalne karakteristične enačbe [4].

Predloženo MKHR lahko uporabimo za izvedbo parametričnih študij, ki so pomembna in učinkovita

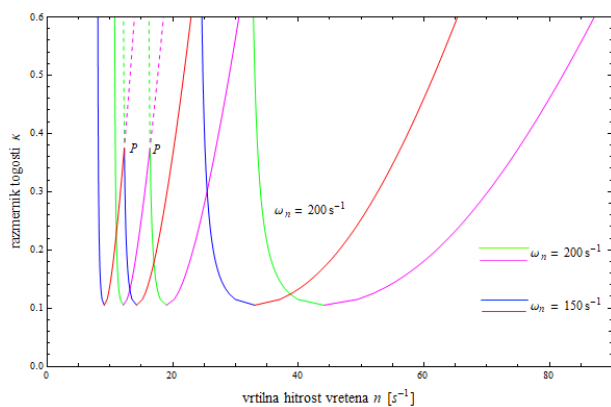
podpora v procesu konstruiranja. V tem članku sta predstavljeni dve parametrični študiji, kjer v prvi študiji proučujemo vpliv faktorja strukturnega dušenja  $\zeta$ , v drugi parametrični študiji pa vpliv naravne krožne frekvence  $\omega_n$ .

Na sliki 4 je prikazan potek mej stabilnosti za dve vrednosti faktorja dušenja  $\zeta=0.05$  in  $\zeta=0.025$ . Z zmanjšanjem faktorja dušenja se lokacije stabilnih in nestabilnih področij za posamezne vrednosti indeksa  $m=0,1,2,\dots$  vzdolž osi vrtilne hitrosti vretena praktično nič ne premaknejo, zniža se samo spodnja meja  $\kappa$  (na vrednost  $\kappa=0.05125$ ), pod katero realne rešitve ne obstajajo, neznatno pa se zniža tudi presečišče  $P$ . Zaradi znižanja teh dveh točk se stabilna področja zmanjšajo, nestabilna pa povečajo.



Slika 4. Diagram stabilnosti samovzbujenih vibracij pri struženju: vpliv spremembe faktorja dušenja  $\zeta$ .

V drugi parametrični študiji je prikazan potek mej stabilnosti, če spreminjamo vrednost naravne krožne frekvence. V primerjavi s prvotnim potekom za vrednost naravne krožne frekvence  $\omega_n=200 \text{ s}^{-1}$  na sliki 2 je na sliki 5 prikazan še potek mej stabilnosti, če naravno krožno frekvenco znižamo na vrednost  $\omega_n=150 \text{ s}^{-1}$ . Iz te slike je jasno razvidno, da sprememba vrednosti naravne krožne frekvence prav nič ne vpliva na položaj presečišča  $P$  in tudi ne na vrednost  $\kappa$  na spodnji meji, pod katero realne rešitve ne eksistirajo (vrednost razmernika togosti na spodnji meji je  $\kappa=0.105$  tako kot v prvem primeru na sliki 2.). Iz slike 5 pa razberemo, da znižanje naravne krožne frekvence vpliva na lokacijo mej stabilnosti vzdolž osi vrtilne hitrosti vretena tako, da se vse meje stabilnosti premaknejo k nižjim vrtilnim hitrostim vretena. Razen tega premika drugih sprememb ni in tako se stabilna in nestabilna področja ne povečajo ali zmanjšajo na račun komplementarnega področja stabilnosti.



Slika 5. Diagram stabilnosti samovzbujenih vibracij pri struženju: vpliv spremembe naravne krožne frekvence  $\omega_n$ .

### 5. Zaključki

V pričujočem članku je obravnavan problem stabilnosti vibracij pri struženju, katerega rešitev predstavlja diagram stabilnosti. Z določitvijo mej stabilnosti je v procesu konstruiranja mogoče izbrati takšne vrednosti parametrov zaprtozračnega sistema v obravnavanem modelu struženja, da proces odrezovanja poteka v stabilnem področju ne glede na spremenljivo vrtilno hitrost vretena. V reševanju problema stabilnosti je uporabljena nova varianta MKHR. Novost predstavljene metode je uporaba posebne transformacije, ki omogoča obravnavo časovnih zakasnitev kot inherentnega pojava pri struženju zaradi vrtenja obdelovanca. Izkaže se, da je MKHR idealna metoda reševanja problema stabilnosti, s katero problem v celoti analitično rešimo. Predložena metoda omogoča izvedbo parametričnih študij, s katerimi so raziskani vplivi sprememb sistemskih parametrov na stabilnost vibracij. V članku sta raziskana vpliva sprememb faktorja strukturnega dušenja in sprememb naravne krožne frekvence na lego in velikost stabilnih oziroma nestabilnih področij v odvisnosti od spremenljive vrtilne hitrosti vretena. Dobljeni rezultati parametričnih študij predstavljajo koristno podporo in vsebujejo nekatere usmeritve za sam proces konstruiranja.

### Literatura

1. Tobias, S.A. *Machine Tool Vibrations*. John Wiley, New York, 1965.
2. Minis, J.E.; Magrab, E.B. in Pandelidis, I.O. Improved Methods for the Prediction of Chatter in Turning – Part 3: A Generalized Linear Theory. *ASME Journal of Engineering for Industry* **1990**, 112, 28-35.
3. Merrit, H.E. Theory of Self Excited-Tool Chatter: Research 1. *ASME Journal of Engineering for Industry* **1965**, 87, 447-454.
4. Chen, S.-G.; Ulsoy, A.G.; Koren, Y. Computational Stability Analysis of Chatter in Turning. *Journal of Manufacturing Science and Engineering, Transactions of ASME* **1997**, 119, 457-460.
5. Beudaert, X.; Mancisidor, I.; Ruiz, L.M.; Barrios, A.; Erkorkmaz, K.; Munoa, J. *Analysis of the feed drives control parameters on structural chatter vibrations*.

XIIIth International Conference on High Speed Machining (HSM 2016), Metz, France, Oct. 2016.

6. Pušenjak, R.R.; Oblak, M.M. Incremental harmonic balance method with multiple time variables for dynamical systems with cubic non-linearities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **2004**, 59, 255-292.