

Upravljanje proizvodnega sistema z zakasnitvami v proizvodnji s pomočjo Lambertovih funkcij

Control of production system with production delays by means of Lambert functions

Rudolf Pušenjak^{1,*}, Maks Oblak

¹ Fakulteta za industrijski inženiring Novo mesto/Šegova ulica 12, SI-8000 Novo mesto

* Avtor za korespondenco: rudolf.pusenjak@fini-unm.si

Povzetek: Članek obravnava upravljanje proizvodnega procesa z zakasnitvami v proizvodnji. Namen upravljanja proizvodnega sistema je optimiranje količine proizvodnje tako, da zmanjšamo proizvodne stroške v izbranem časovnem obdobju na minimum. Upravljanje je prikazano v enostavnem proizvodnem sistemu z zakasnitvami, v katerem poteka neprekinjena proizvodnja posameznega izdelka. Za doseganje optimalne proizvodnje so v prispevku uporabljene Lambertove funkcije, s katerimi omogočimo tvorbo analitičnih rešitev linearne diferencialne enačbe z zakasnitvami, ki opisuje proizvodni proces. V članku je raziskana stabilnost upravljanja proizvodnega sistema z določitvijo stabilnostne meje v analitični obliki. Pri tem je ugotovljeno, da zakasnitve proizvodnje povzročajo nihajoči potek dejanskih zalog v odvisnosti od časa, pri čemer z upravljanjem proizvodnje ta nihanja uspešno zadušimo, v kolikor se časovna zakasnitev in stopnja načrtovane proizvodnje na osnovi informacije o pogrešku regulacije nahajata v stabilnem področju. Dobljeni analitični rezultati so primerjani z numerično rešitvijo po metodi Runge-Kutta v programskem okolju Mathematica, pri čemer je ugotovljeno skoraj popolno ujemanje.

Ključne besede: Lambertove funkcije; proizvodni sistem z zakasnitvijo; zmanjševanje proizvodnih stroškov; diferencialna enačba proizvodnega sistema z zakasnitvijo; stabilnostna meja.

Abstract: The article presents the control of production system with production delay. The objective of the control of the production system is the optimization of the quantity of production by minimizing production costs in the selected time period. The production control is presented in a simple production system with delay, where the production of a single product is continuously performed. For achieving the optimal production, the Lambert functions are used in the article, which enable construction of analytical solutions of delayed differential equation governing the production process. In the article, the stability of the control of production system is investigated, where the stability bound is derived in the analytical form. It is found that production delay causes an oscillatory stock response, which can be successfully quenched by controlling production, when the time delay and the rate of the planned production, which is connected to the information about the control error, are in the stable area. The obtained analytical results are compared with numerical solutions, obtained by Runge-Kutta method in the programming environment Mathematica, where a perfect matching is found.

Keywords: Lambert functions; production system with delay; minimization of production costs; differential equation of production system with delay; stability bound.

1. Uvod

V pričujočem članku obravnavamo proizvodni proces, v katerem je časovna zakasnitev proizvodnje inherentna lastnost. Časovno zakasnitev proizvodnje bomo označili s T , s čemer je mišljen čas, ki ga zahteva proizvodnja posameznega izdelka. Zakasnitve se pojavljajo tudi v mnogih fizikalnih in tehniških sistemih, na primer pri kemijskih reakcijah, pri upravljanju nuklearnih reaktorjev, kot transportne zakasnitve v procesih zgorevanja, pri upravljanju robotov in manipulatorjev, itd. Zakasnitve v proizvodnem procesu so vzrok številnih pojavov, ki jih v procesih brez zakasnitev ne pričakujemo. Zaradi tega moramo zakasnitve v proizvodnji nujno upoštevati, kar v splošnem vodi na reševanje sistemov diferencialnih enačb z zakasnitvami (DEZ). Sistemi DEZ so lahko linearni (LDEZ) ali nelinearni (NDEZ). V primeru nelinearnih sistemov predstavlja veliko prednost, če lahko te sisteme lineariziramo in uporabimo metode, podobne reševanju LDEZ. Nelinearne sisteme DEZ lahko rešujemo numerično, na primer z metodo Runge-Kutta, vendar se moramo v tem primeru odpovedati izvajanju splošno veljavnih sklepov. Numerično reševanje z metodo Runge-Kutta bomo uporabili tudi v tem članku z namenom preverjanja analitično dobljenih rešitev. Ker numerične rešitve veljajo le pri dani izbiri numeričnih vrednosti sistemskih parametrov, ni presenetljivo, da se iz vidika splošnosti v zadnjih dveh desetletjih intenzivno razvijajo analitične metode reševanja LDEZ, ki omogočajo sistematično raziskavo lastnosti sistemov z zakasnitvami.

Med analitičnimi metodami reševanja LDEZ se je uveljavila metoda, v kateri rešitev sistema LDEZ poiščemo v obliki linearne kombinacije Lambertovih načinov nihanja [1], izraženimi s pomočjo Lambertovih funkcij [2],[3]. Metodo bomo uporabili v tem članku pri upravljanju proizvodnega procesa z zakasnitvami v proizvodnji. Med analitičnimi metodami je poleg uporabe Lambertovih funkcij znana tudi koračna metoda (angl. method of steps) [4], ki je omejeno uporabna, ker postajajo analitične rešitve z naraščajočim številom korakov težko izračunljive in čedalje bolj nepregledne ter klasična metoda Laplaceove transformacije [4]. Za reševanje LDEZ lahko alternativno uporabljamo tudi razne kombinacije analitično-numeričnih metod, za katere je značilno, da originalni problem zreducirajo na numerično reševanje (običajno) lažjega algebrskega problema. Med te metode štejemo metodo najmanjših kvadratov [4], uporabo Padejeve aproksimacije [5], homotopsko perturbacijsko metodo [6], Adomianovo dekompozicijsko metodo [7], prevedbo na nelinearni

(transcendentni) lastnovrednostni problem [8] ter prevedbe na ekvivalentne integralske enačbe z zakasnitvami [9].

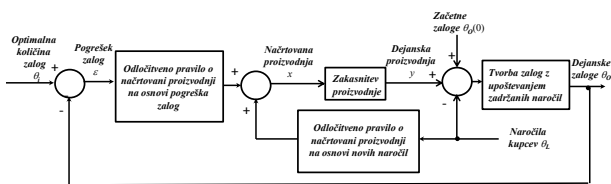
Namen članka je pokazati, da moramo zakasnitve upoštevati, saj lahko v nasprotnem primeru obravnavo posameznega sistema pretirano poenostavimo in dobimo rešitve, v katerih so pomembni, če ne celo najvažnejši pojavi spregledani. Razen tega, da lahko zaradi zakasnitev dobimo nihajoče zaloge z neugodnim vplivom na obseg variabilnih stroškov, bomo v članku analitično določili tudi mejo stabilnosti in s tem dobili kriterij, ki odloča o izvedljivosti optimalnega upravljanja proizvodnje v stabilnem področju.

2. Matematični model upravljanja proizvodnega procesa z zakasnitvijo proizvodnje

Kot smo omenili že v uvodu, je med analitičnimi metodami reševanja LDEZ posebej razvita metoda uporabe Lambertovih funkcij [1], ki jo bomo v tem članku uporabili pri upravljanju enostavnega proizvodnega sistema z zakasnitvami v proizvodnji. Predpostavimo, da v proizvodnem sistemu poteka proizvodnja enega samega izdelka, ki jo želimo upravljati tako, da optimiziramo količino proizvodnje izdelka. Izdelek se v proizvodni organizaciji proizvaja v skladu s standardnimi predpisi in nato skladišči, dokler se ne odpošlje kupcem na osnovi njihovih naročil. Izdelek se neprekinjeno proizvaja, upravljanje količine proizvodnje tega izdelka pa se izvaja tako, da se izdajajo nalogi za dnevno proizvodnjo (oziroma nalogi za proizvodnjo v neki drugi primerni časovni enoti).

Namen upravljanja proizvodnega sistema je zmanjšanje proizvodnih stroškov v izbranem časovnem obdobju na minimum. Stroški proizvodnje, oziroma njihov variabilni del so odvisni od sprememb (variacij) količine proizvodnje in od zaloge dokončanih izdelkov. Proizvodni stroški za določeno število enot izdelka se povečajo, če se količina proizvodnje neprestano spreminja v primerjavi s stroški konstantne količine proizvodnje. Po drugi strani se povečujejo prevozni stroški, če se povečuje zaloga dokončanih izdelkov, zmanjšanje zalog dokončanih izdelkov pod določeno mejo pa povzroča zakasnitve pri izpolnjevanju naročil. Kot kriterij ocenjevanja upravljanja sistema si zato izberemo neko funkcijo sprememb količine proizvodnje in velikosti zalog dokončanih izdelkov.

Blokovna shema upravljanja sistema, ki izhaja iz splošnega systemskega pristopa, je prikazana na sliki 1.



Slika 1. Sistemski pristop k upravljanju proizvodnega procesa z zakasnitvijo proizvodnje.

Kot vhodno veličino v sistem upravljanja na sliki 1 si izberemo zeleno količino zaloga, ki jo smatramo za optimalno in jo označimo z $\theta_i(t)$. Dejanska količina zaloga dokončanih izdelkov predstavlja izhodno veličino sistema upravljanja in jo označimo z $\theta_o(t)$. Dogovorimo se, da je dejanska zaloga dokončanih izdelkov lahko pozitivna ali negativna. Pri tem predstavlja negativna zaloga dokončanih izdelkov v resnici neizpolnjena oziroma zadržana naročila kupcev. Pojem "zaloga" torej pri upravljanju proizvodnega sistema interpretiramo kot "zalogo dokončanih izdelkov ali kot neizpolnjena (zadržana) naročila". Upravljanje količine proizvodnje temelji na primerjavi optimalne količine zaloga $\theta_i(t)$ z dejanskimi zalogami $\theta_o(t)$, kar izrazimo s pomočjo (pozitivnega ali negativnega) odstopanja zaloga ali pogreška $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \theta_i(t) - \theta_o(t) \tag{1}$$

Naročila kupcev na časovno enoto obravnavamo kot obremenitev proizvodnega procesa in jo označimo z $\theta_L(t)$. Z $\theta_o(0)$ je na sliki 6 sliki 1 označena začetna količina zaloga dokončanih izdelkov v trenutku pričetka proizvodnje, ki je praviloma enaka nič.

Proizvodni sistem lahko povsem opišemo s pomočjo dveh dodatnih spremenljivk $x(t)$ in $y(t)$, kjer $x(t)$ predstavlja stopnjo načrtovane nove proizvodnje izdelka v časovni enoti, $y(t)$ pa dejansko stopnjo proizvodnje v časovni enoti. V ta namen predpostavimo, da proizvodna organizacija izdaja dnevne naloge o stopnji proizvodnje izdelka, pri čemer zaradi narave zveznega modela smatramo, da izdajanje nalogov o stopnji proizvodnje izdelka zvezno poteka. Če je pogrešek $\varepsilon(t)$ pozitiven, mora vodstvo podjetja izdati dnevni nalog, da se načrtovana stopnja proizvodnje sorazmerno poveča za delež $K_1\varepsilon(t)$ in mu prišteti še delež $K_2\theta_L(t)$, s katerim upošteva nova naročila kupcev. Stopnjo načrtovane nove proizvodnje potemtakem opišemo z odvisnostjo:

$$x(t) = K_1\varepsilon(t) + K_2\theta_L(t) \tag{2}$$

Ko je nalog o dnevni stopnji načrtovane proizvodnje izdan, preteče nekaj časa, preden se zahtevana količina

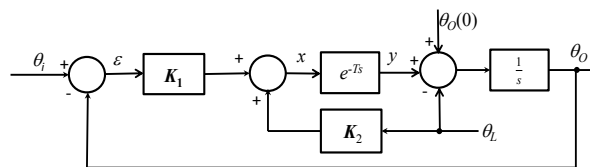
izdelkov proizvede. Ta čas predstavlja zakasnitev T med izdajo naloga o dnevni stopnji načrtovane proizvodnje in njegovo realizacijo. Zakasnitev T se v splošnem lahko spreminja, vendar bomo zaradi enostavnosti vzeli, da je ves čas proizvodnega procesa konstantna. Dejanska stopnja proizvodnje v časovni enoti upošteva to zakasnitev in se s stopnjo načrtovane proizvodnje izraža v obliki:

$$y(t) = x(t - T) \tag{3}$$

Stanje dejanskih zaloga na skladišču $\theta_o(t)$ predstavlja akumulirana dejanska proizvodnja izdelkov, zmanjšana za akumulirano količino naročil kupcev, kar izrazimo v matematični obliki z naslednjim integralom:

$$\theta_o(t) = \theta_o(0) + \int_0^t [y(\tau) - \theta_L(\tau)] d\tau \tag{4}$$

v katerem upoštevamo začetno stanje zaloga $\theta_o(0)$ na skladišču v trenutku $t=0$. Na osnovi enačb (1)-(4) lahko sestavimo celotno blokovno shemo upravljanja proizvodnega procesa z zakasnitvijo proizvodnje, kjer vhodno-izhodne povezave med posameznimi vmesnimi spremenljivkami predstavimo s pomočjo prenosnih funkcij kot jih uporabljamo v regulacijski tehniki. Prenosni funkciji K_1 in K_2 pri tem ustrezata dvema proporcionalnima členoma, prenosna funkcija e^{-Ts} pomeni Laplaceovo transformacijo zakasnilnega člena z zakasnitvijo T , prenosna funkcija $1/s$ Laplaceovo transformacijo integralnega člena, ki ustreza vhodno-izhodni povezavi (4), s s pa je označena kompleksna spremenljivka v slikovni domeni Laplaceove transformacije. Blokovna shema upravljanja proizvodnega procesa z zakasnitvijo, ki je podan z vhodno-izhodnimi povezavami (1)-(4), je prikazana na sliki 2.



Slika 2. Blokovna shema zaprtozančnega upravljanja proizvodnega procesa z zakasnitvijo s prenosnimi funkcijami.

Akumulacija zaloga na skladišču v obliki integrala (4) je z vidika proizvodnega procesa nazorna, vendar predstavlja precejšnje težave v matematični obravnavi procesa, zato enačbo odvajamo na čas t :

$$\frac{d\theta_o(t)}{dt} = y(t) - \theta_L(t) \quad (5)$$

Z eliminacijo vmesnih spremenljivk $\varepsilon(t)$, $x(t)$ in $y(t)$ iz sistema enačb (1), (2), (3) in (5) izpeljemo enačbo upravljanja proizvodnega procesa z zakasnitvami v obliki nehomogene linearne diferencialne enačbe z zakasnitvijo T (LDEZ):

$$\frac{d\theta_o}{dt} + K_1\theta_o(t-T) = K_1\theta_i(t-T) + K_2\theta_L(t-T) - \theta_L(t) \quad (6)$$

kjer K_1 pomeni stopnjo načrtovane proizvodnje na osnovi informacije o pogrešku $\varepsilon(t)$, K_2 pa stopnjo načrtovane proizvodnje na osnovi informacije o naročilih kupcev. V reševanju LDEZ (6) lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je optimalna količina zalog $\theta_o(t-T)$ na predhodnem časovnem intervalu $[-T,0]$ enaka nič, $\theta_i(t-T)=0$, saj v enačbi (6) nastopa aditivno. S to poenostavitvijo dobimo LDEZ:

$$\frac{d\theta_o}{dt} + K_1\theta_o(t-T) = K_2\theta_L(t-T) - \theta_L(t) \quad (7)$$

ki jo bomo reševali v nadaljevanju, pri čemer je $\theta_L(t)$ obremenitev sistema, ki je znana tako na časovnem intervalu $[0,t)$, na katerem časovni potek dejanskih zalog izdelkov $\theta_o(t)$ iščemo, kot tudi na predhodnem intervalu $[-T,0]$ v obliki predpisane časovne funkcije $\theta_L(t-T)$.

3. Reševanje enačbe upravljanja proizvodnega procesa s pomočjo Lambertovih funkcij

Ko rešujemo LDEZ (7), moramo podobno kot pri navadnih linearnih diferencialnih enačbah najprej rešiti pripadajočo homogeno diferencialno enačbo. V primeru upravljanja proizvodnega procesa, opisanem v predhodnem poglavju se homogena diferencialna enačba z zakasnitvijo prvega reda glasi:

$$\frac{d\theta_o(t)}{dt} + K_1\theta_o(t-T) = 0, \quad T > 0 \quad (8)$$

pri čemer je časovni potek dejanskih zalog $\theta_o(t)$ na predhodnem intervalu $[-T,0]$ predpisan kot znana funkcija $\theta_o(t) = \phi(t)$, $t \in [-T,0]$. Iz obnašanja navadnih diferencialnih enačb prvega reda vemo, da lahko rešitev enačbe (8), kadar je zakasnitev T enaka nič, $T=0$, eksponencialno narašča ali pada. Seveda pa običajno ne pričakujemo, da more imeti rešitev enačbe (8) pri zakasnitvah, ki so večje od nič, $T > 0$, tudi oscilatorni

značaj ali je celo nestabilna. Narava posamezne rešitve je močno odvisna od relacije med vrednostima parametrov K_1 in T , prav tako pa tudi od predhodne funkcije $\phi(t)$.

Kot nastavek za rešitev enačbe (8) privzamemo rešitev v obliki $\theta_o(t) = Ce^{st}$. Z vstavljanjem v enačbo (8) dobimo nelinearno transcendentno karakteristično enačbo:

$$F(s) = se^{sT} + K_1 = 0 \quad (9)$$

Težava pri reševanju LDEZ obstoji v tem, da potrebujemo analitično metodo, s katero je mogoče rešiti transcendentalno karakteristično enačbo.

Z namenom, da rešimo enačbo (9), v nadaljevanju predstavljamo nov pristop, ki temelji na razredu posebnih funkcij $W(s)$, imenovanih Lambertove funkcije. Po definiciji, ki jo je v [2] prvi predstavil sam Lambert leta 1758, kasneje pa tudi Euler v [3], se Lambertova funkcija imenuje vsaka funkcija, ki zadošča enačbi

$$W(s)e^{W(s)} = s \quad (10)$$

To definicijo lahko uporabimo za reševanje enačbe (9), ki jo najprej prepisemo na obliko:

$$sTe^{sT} = -K_1T \quad (11)$$

in nato uporabimo definicijo Lambertove funkcije (10) nad argumentom $-K_1T$, s čemer dobimo:

$$W(-K_1T)e^{W(-K_1T)} = -K_1T \quad (12)$$

Enačbo (11) lahko sedaj zapišemo v obliki:

$$sTe^{sT} = W(-K_1T)e^{W(-K_1T)} \quad (13)$$

ki velja le tedaj, če velja:

$$sT = W(-K_1T) \quad (14)$$

Iz enačbe (14) sledi določilna enačba za izračun korenov karakteristične enačbe (9):

$$s = \frac{1}{T}W(-K_1T) \quad (15)$$

kjer se posamezni koreni transcendentne karakteristične enačbe izražajo z Lambertovimi funkcijami.

V najbolj splošni obliki je Lambertova funkcija kompleksna funkcija, ki ima neskončno mnogo vej, pri

čemer posamezne veje Lambertove funkcije označimo z $W_k(s)$, kjer indeks k zavzame vrednosti $k = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty$. Na intervalu $[-1/e, +\infty)$ je definirana takoimenovana osnovna veja Lambertove funkcije z indeksom $k=0$, ki jo v skladu z dogovorom označimo z $W_0(s)$, na katerem zavzame le realne vrednosti. Osnovno vejo Lambertove funkcije izračunamo s pomočjo vrste:

$$W_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} s^n \tag{16}$$

(Caratheodory [10]). Izven intervala $[-1/e, +\infty)$ je Lambertova funkcija $W_0(s)$ kompleksna. Realne vrednosti na intervalu $[-1/e, 0)$ zavzame tudi veja $W_{-1}(s)$ z indeksom $k=-1$, zunaj tega intervala pa je tudi ta veja kompleksna. Vse ostale veje Lambertove funkcije $W_k(s)$, kjer indeks k zavzame vrednosti $k = -\infty, \dots, -2$ oziroma $k = 1, 2, \dots, +\infty$ so kompleksne na celotnem območju argumenta s in jih lahko izračunamo s pomočjo formule [10]:

$$W_k(s) = \ln_k(s) - \ln(\ln_k(s)) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{lm} \frac{(\ln(\ln_k(s)))^m}{(\ln_k(s))^{l+m}} \tag{17}$$

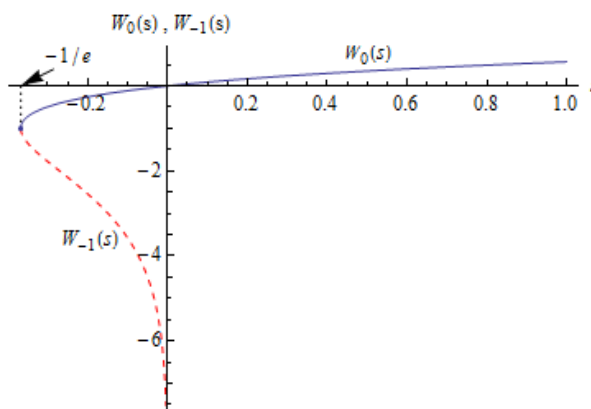
kjer $\ln_k(s) = \ln(s) + 2\pi i k$ označuje k -to logaritemsko vejo, $i = \sqrt{-1}$ in koeficienti C_{lm} pomenijo Stirlingova ciklična števila:

$$C_{lm} = \frac{1}{m!} (-1)^l \binom{l+m}{l+1} \tag{18}$$

Lambertove funkcije niso standardne funkcije in jih tudi s kalkulatorji, namenjenimi za znanstveno uporabo, ne moremo izračunati. Vendar so razvijalci programske opreme spoznali pomen Lambertovih funkcij na zelo različnih področjih, tako da simbolični programski sistemi kot so Maple, Matlab in Mathematica omogočajo izračun Lambertovih funkcij pri poljubnih vrednostih argumenta s . Še več, v vseh teh sistemih lahko izvedemo različne simbolične operacije z Lambertovimi funkcijami. V programskem sistemu Matlab Lambertovo funkcijo izračunamo pod imenom *LambertW*, v Mathematici pa pod imenom *ProductLog* [k,s], kjer indeks k označuje vejo Lambertove funkcije, simbol s pa označuje njen argument. V Mathematici zlahka izračunamo in narišemo potek osnovne veje Lambertove funkcije $W_0(s)$ za realne vrednosti argumenta s na intervalu $[-1/e, +\infty)$ kot tudi potek veje $W_{-1}(s)$ za realne vrednosti argumenta s na intervalu $[-1/e, 0)$ z naslednjim programom:

```
graf1 = Plot[ProductLog[0, x], {x, -1/E, 1}]
graf2 = Plot[ProductLog[-1, x], {x, -1/E, 0},
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Dashed}]
Show[graf1, graf2, PlotRange -> All, AxesLabel -> {s, " W_0(s), W_{-1}(s)"}]
```

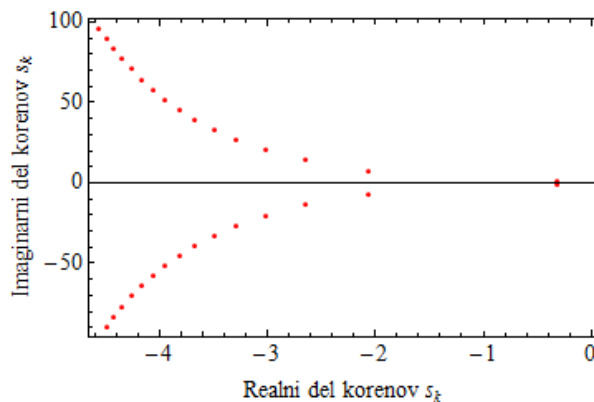
in ju prikažemo v diagramu na sliki 3:



Slika 3. Potek realnih vej $W_0(s)$ in $W_{-1}(s)$ Lambertove funkcije.

Iz zgornjega diagrama je razvidno, da osnovna veja Lambertove funkcije na celotnem intervalu $-1/e \leq s < +\infty$ izpolnjuje neenačbo $-1 \leq W_0(s)$, veja $W_{-1}(s)$ pa neenačbo $W_{-1}(s) \leq -1$ na intervalu $-1/e \leq s < 0$.

Kot primer si oglejmo izračun prvih 31 korenov karakteristične enačbe (9) s podatki $K_1=T=1$. Korene karakteristične enačbe izračunamo s pomočjo enačbe (15), ki se pri podatkih $K_1=T=1$ skrči na enačbo $s_k = 1 \times W_k(-1) = W_k(-1)$, kjer indeks k teče od -15 do $+15$. Lego prvih 31 karakterističnih korenov v Gaussovi ravnini prikazuje slika 4.



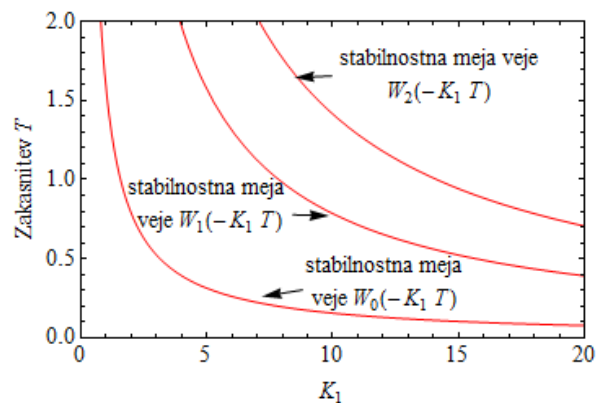
Slika 4. Lega korenov transcendentne karakteristične enačbe v Gaussovi ravnini

Kot vidimo iz narišanega diagrama, nobeden izmed korenov $W_k(-1)$, $k = -15, \dots, 15$ ni realen, vsi imajo poleg realnih tudi imaginarne dele. To je zaradi tega, ker je argument Lambertove funkcije -1 manjši od vrednosti $-1/e = -0.367879$, ki označuje spodnjo mejo intervala, na katerem so definirane realne vrednosti Lambertovih

funkcij W_0 in W_{-1} . Korena $W_{-1}(-1)$ in $W_0(-1)$ v zgornjem diagramu imata med vsemi prikazanimi koreni najmanjši imaginarni del in sta konjugirano kompleksna: $W_{-1}(-1) = -0.318132 - 1.33724i$, $W_0(-1) = 0.318132 + 1.33724i$. Realna dela korenov $W_{-1}(-1)$ in $W_0(-1)$ z vrednostjo -0.318132 ležita v Gaussovi ravnini najbližje imaginarni osi. V primeru, da bi imeli karakteristična korena $W_0(\cdot)$ in $W_{-1}(\cdot)$ s pozitivnimi realnimi deli, bi sistem postal nestabilen. Mejo med stabilnim in nestabilnim območjem potemtakem določata karakteristična korena $W_0(\cdot)$ in $W_{-1}(\cdot)$, pri katerih je realni del enak nič, imaginarni del pa različen od nič. Kot je razvidno iz slike 3, prehaja veja $W_0(\cdot)$ pri vrednosti argumenta $s=0$ skozi koordinatno izhodišče in ima vrednost $W_0(0)=0$. Ta vrednost ne prihaja v poštev za določevanje meje med stabilnostjo in nestabilnostjo, ker ne izpolnjuje pogoja, da mora biti ob realnem delu hkrati imaginarni del različen od nič.

Na podlagi enačbe (15) lahko v Mathematici s pomočjo ukaza `FindRoot[Re[ProductLog[0, -KT]], {KT, 1/E}]` (kjer izpustimo indeks 1 v konstanti K_1 zaradi programskih zahtev!) najdemo vrednost $K_1 T = \pi/2$. Enačba $K_1 T = \pi/2$ je enačba hiperbole, ki določa mejo med stabilnim in nestabilnim območjem, če se parametra K_1 in T spreminjata. Ta meja je določena na podlagi stabilnosti osnovnega korena karakteristične enačbe (15). Podobno lahko iščemo tudi pri veji $W_{-1}(\cdot)$ takšno vrednost $K_1 T$, pri kateri je realni del Lambertove funkcije $W_{-1}(\cdot)$ enak nič, imaginarni del pa različen od nič, če se nahajamo izven intervala $[-1/e, 0)$. V ta namen uporabimo ukaza `FindRoot[Re[ProductLog[-1, -KT]], {KT, 1/E}]`, `FindRoot[Re[ProductLog[-1, -KT]], {KT, tol}]`, kjer je *tol* neko majhno pozitivno število. Oba ukaza vrmeta isto vrednost $K_1 T = \pi/2$, ki smo jo dobili že pri veji $W_0(\cdot)$. Vrednosti $K_1 T$ pri drugih korenih enačbe (15), ki imajo realni del enak nič, imaginarni del pa od nič različen, pa se vendarle razlikujejo od vrednosti $\pi/2$. Tako dobimo pri vejah $W_{-2}(\cdot)$ in $W_{-1}(\cdot)$ vrednost $K_1 T = 7.85398$, pri vejah $W_{-3}(\cdot)$ in $W_{-2}(\cdot)$ pa vrednost $K_1 T = 14.1372$. Hiperbolične poteke pri prvih treh korenih enačbe (15) z vrednostmi indeksov $k=0, 1$ in 2 , na katerih imajo posamezni koreni realni del enak nič, imaginarni del pa različen od nič, prikazuje slika 5. Hiperbola, ki pripada veji $W_0(-K_1 T)$, predstavlja mejo stabilnosti sistema, ki je ostale hiperbole ne spreminjajo. Pod hiperbolo veje $W_0(-K_1 T)$, ki ima realni del enak nič, imaginarni del pa različen od nič, je stabilno območje, nad hiperbolo pa nestabilno območje. Iz diagrama na sliki 5 izhaja, da lahko pri fiksni vrednosti časovne zakasnitve T preidemo iz stabilnega območja v nestabilno območje le s povečevanjem parametra K_1 , podobno pa lahko pri fiksni vrednosti parametra K_1 iz

stabilnega v nestabilno območje preidemo le s povečevanjem zakasnitve T . Teh ugotovitev ne smemo kar tako posplošiti na dinamične sisteme višjega reda, kjer je določevanje stabilnostnih mej v splošnem bolj zapleteno.



Slika 5. Stabilnostne meje posameznih vej Lambertove funkcije pri upravljanju proizvodnega procesa z zakasnitvijo.

Splošno rešitev homogene enačbe (8) z izračunanimi koreni enačbe (15) lahko sedaj zapišemo v obliki:

$$\theta_o(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{\left[\frac{1}{T} W_k(-K_1 T)\right] t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \xi_k(t) \quad (19)$$

kjer so C_k koficijenti, ki jih določimo s pomočjo predpisane predhodne funkcije na predhodnem intervalu $[-T, 0]$. Funkcije

$$\xi_k(t) = e^{\left[\frac{1}{T} W_k(-K_1 T)\right] t} \quad (20)$$

imenujemo Lambertove načine nihanja, koeficiente C_k pa Lambertovi koeficijenti. V praksi v splošni rešitvi upoštevamo dovolj veliko število dominantnih Lambertovih načinov nihanja in zgornjo neskončno vsoto aproksimiramo z okrnjeno vsoto:

$$\theta_o(t) = \sum_{k=l}^N C_k \xi_k(t) \quad (21)$$

kjer limitira N v teoretičnem smislu proti neskončnosti, $N \rightarrow \infty$, indeks l pa moramo vzeti enak $l = -(N+1)$ pri asimetričnem oštevilčenju vej Lambertove funkcije in $l = -N$ pri simetričnem oštevilčenju, ker lahko le tako zagotovimo realno rešitev. Asimetrično oštevilčenje vej Lambertove funkcije moramo upoštevati v primeru, ko je argument Lambertove funkcije negativen, to je takrat,

ko je $-K_1T < 0$. Iz slike 3 je razvidno, da moramo pri negativnem argumentu razen osnovne veje $W_0(-K_1T)$ v vsoti (21) upoštevati tudi vejo $W_{-1}(-K_1T)$, pri pozitivnem argumentu $-K_1T > 0$ pa samo vejo $W_0(-K_1T)$. S tem je razlika v izbiri števca l pri asimetričnem oziroma simetričnem oštevilčenju pojasnjena.

3.1 Določevanje koeficientov C_k v splošni rešitvi homogene enačbe

V splošnem lahko v obliki enačbe (21) izrazimo kakršnokoli dano zvezno funkcijo. To pomeni, da lahko z izbiro Lambertovih koeficientov C_k in Lambertovimi načini nihanja $\zeta_k(t)$ izrazimo tudi predhodno funkcijo, podano na predhodnem intervalu:

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \xi_k(t), \quad t \in [-T, 0] \quad (22)$$

Iz praktičnih razlogov smo tudi v tem primeru prisiljeni neskončno vsoto okrniti in jo zamenjati z vsoto:

$$\phi(t) = \sum_{k=l}^N C_k \xi_k(t), \quad t \in [-T, 0] \quad (23)$$

Podobno kot pri navadnih diferencialnih enačbah enačbo (23) uporabimo v obratnem smislu tako, da s pomočjo znanih vrednosti funkcije $\phi(t)$ določamo neznane Lambertove koeficiente C_k . Teh koeficientov je $2N+1$ pri simetričnem in $2N+2$ pri asimetričnem oštevilčenju vej Lambertove funkcije. V skladu s tem razdelimo celotni interval $[-T, 0]$ na $M=2N$ enakih podintervalov pri simetričnem oziroma na $M=2N+1$ enakih podintervalov pri asimetričnem oštevilčenju. S to delitvijo predhodno funkcijo $\phi(t)$ in Lambertove načine nihanja $\zeta_k(t)$ ɔdtipamo v časovnih trenutkih

$-T, -T + \frac{T}{M}, -T + \frac{2T}{M}, \dots, \frac{T}{M}, 0$, pri ɔemer vsakemu "odtipku" ustreza enačba oblike:

$$\phi\left(-T + \frac{iT}{M}\right) = \sum_{k=l}^N C_k \xi_k\left(-T + \frac{iT}{M}\right), \quad i = 0, 1, \dots, M \quad (24)$$

Število enačb (24), ki jih na ta naɔin tvorimo, je $M+1$, kar ustreza pri simetričnem oštevilčenju $2N+1$ koeficientom, pri asimetričnem oštevilčenju pa $2N+2$ koeficientom. Sistem enačb (24) je ugodno zapisati v matrični obliki:

$$\Phi = \Xi \cdot C \quad (25)$$

Ob predpostavki, da obstaja inverzna matrika Lambertovih naɔinov nihanja Ξ^{-1} , lahko izraunamo neznan vektor Lambertovih koeficientov z enačbo $C = \Xi^{-1} \cdot \Phi$. Posamezni Lambertov koeficient C_k dobimo s skalarnim množenjem k -te vrstice matrike Ξ^{-1} z vektorjem Φ :

$$C_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\Xi^{-1} \cdot \Phi \right)_k, \quad k \in \{l, l+1, \dots, N\} \quad (26)$$

Rešitev (21) homogene LDEZ lahko s tem zapišemo v obliki:

$$\theta_o(t) = \sum_{k=l}^N \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\Xi^{-1} \cdot \Phi \right)_k \xi_k(t) = \sum_{k=l}^N \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\Xi^{-1} \cdot \Phi \right)_k e^{\left[\frac{1}{T}W_k(-K_1T)\right]t} \quad (27)$$

3.2 Tvorba popolne rešitve nehomogene LDEZ

Povrnimo se sedaj k tvorbi popolne rešitve nehomogene diferencialne enačbe prvega reda z zakasnitvijo (7). Splošno rešitev nehomogene enačbe dobimo tako, da k rešitvi homogene diferencialne enačbe z zakasnitvijo, ki smo jo dobili v obliki enačbe (21), za raunanje v praksi pa v obliki enačbe (27), prištejemo neko partikularno rešitev. Partikularno rešitev enačbe (7) iščemo v obliki integralske enačbe:

$$\theta_o^P(t) = \int_0^t \psi(t, \zeta) bu(\zeta) d\zeta = \int_0^t \sum_{k=l}^N C_k^P e^{\left[\frac{1}{T}W_k(-K_1T)\right](t-\zeta)} bu(\zeta) d\zeta, \quad t \geq 0 \quad (28)$$

kjer je $\psi(t, \zeta)$ jedro integralske enačbe, $bu(\zeta)$ je v kompaktni obliki zapisana desna stran enačbe (7), C_k^P pa so neznani koeficienti partikularne rešitve.

Popolno rešitev nehomogene enačbe (7) z upoštevanjem dominantnih Lambertovih naɔinov nihanja potemtakem lahko z okrnjenima vsotama zapišemo v obliki:

$$\theta_o(t) = \sum_{k=l}^N C_k e^{\left[\frac{1}{T}W_k(-K_1T)\right]t} + \int_0^t \sum_{k=l}^N C_k^P e^{\left[\frac{1}{T}W_k(-K_1T)\right](t-\zeta)} bu(\zeta) d\zeta \quad (29)$$

v kateri neznane koeficiente partikularne rešitve C_k^P doloimo s pomočjo Laplaceove transformacije in teorije ostankov v obliki:

$$C_k^P = \frac{1}{1 - K_1 T e^{-W_k(-K_1 T)}} \quad (30)$$

4. Rezultati in diskusija

Oglejmo si sedaj rešitev upravljanja proizvodnega sistema, v katerem upoštevamo zadržana naročila, to se pravi, da opišemo evolucijo dejanskih zalog $\theta_o(t)$ z enačbo (7). Zaradi enostavnosti pri tem predpostavimo vrednosti $K_1=1$ in $K_2=1$ ter čas zakasnitve $T=1$, časovni potek naročil kupcev pa vzemimo v obliki stopničaste funkcije, kar pomeni, da so naročila za vse čase $t>0$ konstantna. Naloga za programsko okolje Mathematica ne predstavlja nobenih težav, le funkcijo obremenitve sistema $b*u(t)=b*UnitStep[t]$ je potrebno v enačbi (29) zamenjati s funkcijo $b_1*u(t)+b_2*u(t-T)=b_1*UnitStep[t]+b_2*UnitStep[t-T]$, kjer je $b_1=-K_1=-1$ in $b_2=K_2=1$. Na sliki 6 je prikazana rešitev z upoštevanjem 2 vej Lambertove funkcije, na kateri pa kljub tako grobi aproksimaciji opazimo kar dobro ujemanje z numerično rešitvijo po metodi Runge-Kutta na celotnem intervalu $[-T,10]$. Odziv $\theta_o(t)$, ki ustreza dejanskim zalogam kaže oscilatorni karakter z negativnimi in pozitivnimi polperiodami na intervalu $[0,10]$, pri čemer negativne vrednosti pomenijo neizpolnjena naročila, pozitivne vrednosti pa v resnici ustrezajo stanju dejanskih zalog.

Amplitude nihajev dejanskih zalog se na celotnem intervalu $[0,10]$ postopoma zmanjšujejo in se na koncu ustalijo pri vrednosti nič, kar pomeni, da po daljšem obdobju proizvodnje odpravimo neizpolnjena naročila, hkrati pa se tudi stanje dejanskih zalog zmanjša na vrednost nič. Stacionarno vrednost dejanskih zalog lahko analitično izračunamo tako, da v enačbi (7)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\theta_o}{dt} = 0$$

upoštevamo in uporabljamo oznake

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_o(t) = \theta_{o_s}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_L(t-T) = \theta_{L_s} = 1$$

. Enačba

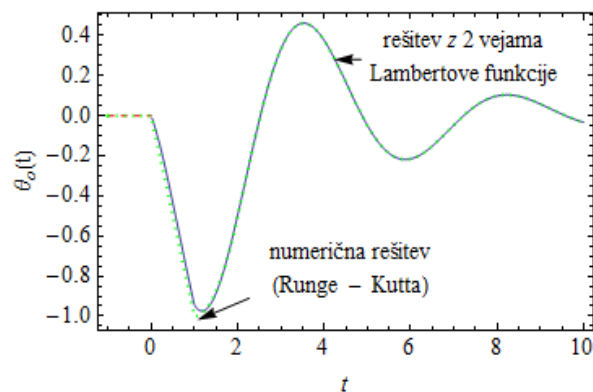
(7) preide s tem na obliko:

$$-K_1\theta_{o_s} + K_2\theta_{L_s} - \theta_{L_s} = 0 \quad (31)$$

iz katere izračunamo stacionarno vrednost

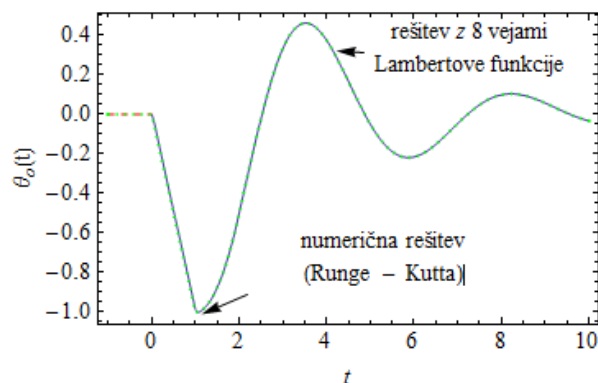
$$\theta_{o_s} = \frac{\theta_{L_s}(1-K_2)}{-K_1} = \frac{1 \times (1-1)}{-1} = 0 \quad (32)$$

in z njo potrdimo pričakovanja, ki izhajajo iz slike 6 ko limitira čas $t \rightarrow \infty$.



Slika 6. Primerjava analitične rešitve upravljanja proizvodnega sistema $\theta_o(t)$ z zadržanimi naročili z numerično rešitvijo po metodi Runge-Kutta za $T=1$, $b_1=-K_1=-1$, $b_2=K_2=1$ in $N=0$.

Na sliki 7 je prikazana rešitev z 8 vejami Lambertove funkcije, oziroma z $N=3$. Iz slike lahko razberemo, da se rešitev, izračunana z uporabo Lambertove funkcije na celotnem intervalu $[-T,10]$ skoraj popolnoma ujema z numerično rešitvijo po metodi Runge-Kutta.

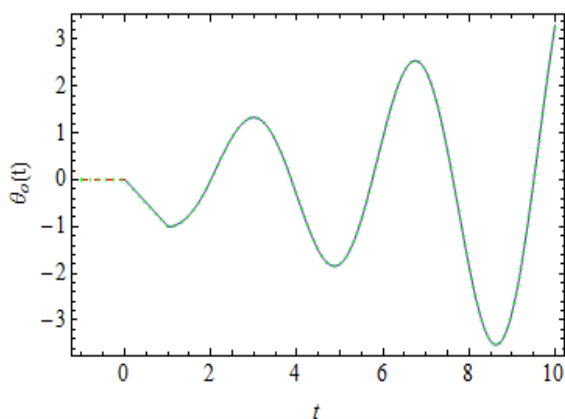


Slika 7. Primerjava analitične rešitve upravljanja proizvodnega sistema $\theta_o(t)$ z zadržanimi naročili z numerično rešitvijo po metodi Runge-Kutta za $T=1$, $b_1=-K_1=-1$, $b_2=K_2=1$ in $N=3$.

Iz diagrama na sliki 5 nedvomno izhaja, da se proizvodni sistem s časovno zakasnitvijo $T=1$ in stopnjo načrtovane proizvodnje na osnovi pogreška regulacije $K_1=1$ nahaja v stabilnem področju, to je pod hiperbolo, ki označuje mejo stabilnosti veje $W_0(-K_1T)$. Stabilno upravljanje proizvodnega procesa ima za posledico stacionarno vrednost pogreška regulacije, ki je v tem primeru enaka nič, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_{i_s} - \theta_{o_s}) = 0$.

Toda če vrednost konstante K_1 pri nespremenjeni vrednosti časovne zakasnitve $T=1$ povečamo na $K_1=2$, se po diagramu na sliki 5 že nahajamo v nestabilnem

področju, kar praktično pomeni, da upravljanje proizvodnega procesa ne deluje več, oziroma se amplitude nihanja dejanskih zalog s časom neomejeno povečujejo. O tem se lahko prepričamo tudi z rešitvijo enačbe (7), ki jo prikazuje slika 8. Tudi v tem primeru kaže primerjava z numerično rešitvijo po metodi Runge-Kutta skoraj popolno ujemanje. Rezultat je presenetljiv, saj nedvomno dokazuje, da so zakasnitve proizvodnje vzrok nestabilnosti sistema kljub temu, da naročila po predpostavki ne nihajo, temveč so ves čas konstantna!



Slika 8. Primerjava nestabilne analitične rešitve upravljanja proizvodnega sistema $\theta_0(t)$ z zadržanimi naročili z numerično rešitvijo po metodi Runge-Kutta za $T=1$, $b_1=-K_1=-2$, $b_2=K_2=2$ in $N=3$.

5. Zaključki

V članku je prikazana analitična metoda reševanja problema upravljanja proizvodnega sistema z zakasnitvami v proizvodnji. Pri tem je ugotovljeno, da zakasnitve proizvodnje povzročajo nihajoči potek dejanskih zalog v odvisnosti od časa, pri čemer z upravljanjem proizvodnje ta nihanja uspešno zadržimo, v kolikor se časovna zakasnitev in stopnja načrtovane proizvodnje na osnovi informacije o pogrešku regulacije nahajata v stabilnem področju. V kolikor se ta dva parametra nahajata v nestabilnem področju, upravljanje proizvodnje ni stabilno, kar se odraža v neomejenem povečevanju amplitud nihanja dejanskih zalog ne glede na predpostavljeno konstantno obremenitev sistema (konstanten nivo naročil). Meja stabilnosti je v članku analitično določena.

Prikazana metoda je širše uporabna v tehniki, predvsem v sistemih avtomatske regulacije in v mehatronskih sistemih. Blokovna shema obravnavanega proizvodnega sistema ima številne analogije v tehničnih sistemih. Oba konstantna člena blokovne sheme na primer lahko ustrezata proporcionalnemu regulatorju, zakasnilni člen lahko ponazarja zakasnitve zaradi

obdelave merskih podatkov, časa procesiranja v procesni enoti ali celo transportnih zakasnitev, integralni člen je v mehatronskih sistemih lahko hidravlični ali pnevmatski izvršni člen (aktuator), itd. Za dejansko uporabo v tehničnih sistemih pa je potrebna razširitev prikazane metode iz skalarnega na vektorsko-matrični primer.

Literatura

1. Asl, F.M., Ulsoy, A. G. Analysis of a System of Linear Delay Differential Equations. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Transactions of the ASME*, 2003, 125, 215-223.
2. Lambert, J.H. Observations Vanes in Mathesin Puram. *Acta Helvetica. Physico-mathematico-anatomico-botanico-medica*, 1758, 3, 128-168.
3. Euler, L. Deformulis exponentialibus replicatis. *Leonardo Euleri Opera Omnia*, 1777, 1(15), 268-297.
4. Heffernan, J.M., Corless, R.M. Solving some delay differential equations with computer algebra. *Mathematical Scientist*, 2006, 31, 21-34.
5. Vajta, M. On Pade approximations of dead-time. *Internal Report*, Dept. Of Mathematical Sciences, University of Twente, 2000.
6. He, J.-H. Periodic solutions and bifurcations of delay-differential equations. *Physics Letters A*, 2005, 347, 228-230.
7. Evans, D.J., Raslan, K.R. The Adomian Decomposition Method for Solving Delay Differential Equation. *Intern. J. of Comp. Math.*, 2005, 82(1), 49-54.
8. Singh, K. V., Ram, Y.M. Transcendental eigenvalue problem and its applications. *AIAA Journal*, 2002, 40, 1402-1407.
9. Brunner H. Iterated Collocation Methods for Volterra Integral Equations with Delay Arguments. *Mathematics of Computation*, 1996, 62(206), 581-599.
10. Caratheodory, C. *Theory of Functions of a Complex Variable*; Chelsea, New York, 1954.